Nouvelles annales de mathématiques

J. Pomey

# Tangente en un point d'une courbe remarquable

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 8 (1889), p. 527-529

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__527_1>

# TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE REMARQUABLE;

PAR M. J. POMEY.

Soient $n$ courbes fixes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dans un plan; M un point de ce plan; $T_1$, $T_2$, $\ldots$, $T_n$ les longueurs des tangentes menées du point M à ces courbes; posons

$$t_1 = \tfrac{1}{2}T_1^2, \qquad t_2 = \tfrac{1}{2}T_2^2, \qquad \ldots$$

et

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \text{const.}$$

En vertu de cette relation, le point M est assujetti à rester sur une courbe. Je dis que *la normale à cette courbe au point* M *passe par le centre de masse* G *des masses* $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_n}$ *respectivement appliquées aux centres de courbure des courbes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *correspondant aux points de contact des tangentes issues du point* M.

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ les coordonnées de ces centres de courbure par rapport à des axes rectangulaires; $R_1, R_2, R_n$ les rayons de courbure correspondants; $x, y$ les coordonnées du point M. $R_1, R_2, \ldots, R_n$ restent constants quand $x$ et $y$ deviennent $x + dx$, $y + dy$.

On a alors

$$(1) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 = 0,$$

$$2t_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2, \qquad \ldots,$$
$$dt_1 = (x - a_1)\,dx + (y - b_1)\,dy, \qquad \ldots.$$

Les coordonnées X et Y de G sont

$$X \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} = \sum a_1 \frac{\partial f}{\partial t_1},$$
$$Y \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} = \sum b_1 \frac{\partial f}{\partial t_1},$$

et l'équation (1) devient, en supprimant le facteur commun $\sum \frac{\partial f}{\partial t_1}$,

$$(x - X)\,dx + (y - Y)\,dy = 0,$$

qui représente bien l'équation de la normale, si X et Y y sont considérées comme des coordonnées courantes. Le point $(X, Y)$ est donc situé sur la normale. C. Q. F. D.

*Nota*. — En ce qui concerne le rayon de courbure $\rho$ de la courbe, lieu du point M, soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les projections sur la normale des droites qui joignent le point M aux centres de courbure de $C_1, C_2, \ldots, C_n$; soient $R'_1$ $R'_2$, ... les rayons de courbure des développées de ces courbes; soit N la distance GM, on trouve la formule suivante, peu susceptible d'une interprétation simple,

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} d_i d_j + \left(1 + \frac{N}{\rho}\right) \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} - \sum \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{R'_1}{T_1} \cos^2(\widehat{R_1 ds}) = 0.$$