Nouvelles annales de mathématiques

Étienne Pomey

Longueur des axes d'une section plane d'une quadrique, en coordonnées obliques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 88-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__88_1>

LONGUEUR DES AXES D'UNE SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE, EN COORDONNÉES OBLIQUES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

I. — *Notations.*

Nous désignerons par λ, μ, ν les angles des axes OX, OY, OZ; nous représenterons le plan par l'équation

$$lX + mY + nZ + p = 0,$$

et la quadrique (à centre unique) par

$$f(X, Y, Z) \equiv \varphi(X, Y, Z) + 2CX + 2C'Y + 2C''Z + D = 0,$$

en posant

$$\varphi(X, Y, Z) \equiv AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + B'ZX + 2B''XY.$$

Enfin, nous poserons, pour abréger,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \qquad H = \left|\begin{array}{c:c} \Delta & \begin{matrix} C \\ C' \\ C'' \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} C & C' & C'' \end{matrix} & D \end{array}\right|,$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{c:c} \Delta & \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} l & m & n \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \qquad H_1 = \left|\begin{array}{c:c} H & \begin{matrix} l \\ m \\ n \\ p \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} l & m & n \end{matrix} & 0 \end{array}\right|, \qquad K = \frac{H_1}{\Delta_1},$$

$$[\rho] = \begin{vmatrix} A + \dfrac{K}{\rho} & B'' + \dfrac{K}{\rho}\cos\nu & B' + \dfrac{K}{\rho}\cos\mu & l \\ B'' + \dfrac{K}{\rho}\cos\nu & A' + \dfrac{K}{\rho} & B + \dfrac{K}{\rho}\cos\lambda & m \\ B' + \dfrac{K}{\rho}\cos\mu & B + \dfrac{K}{\rho}\cos\lambda & A'' + \dfrac{K}{\rho} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}\sigma(x, y, z) \equiv \sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda \\ + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.\end{aligned}$$

II. — *Théorèmes préliminaires.*

Théorème I. — *Les équations de la conique, par rapport à des axes ox, oy, oz, parallèles à* OX, OY, OZ, *et passant par son centre o, sont*

$$(1) \qquad lx + my + nz = 0,$$

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) + K = 0.$$

En effet, en désignant par a, b, c les coordonnées du centre o, les équations de la conique dans le nouveau système sont évidemment

$$lx + my + nz = 0,$$

$$\begin{aligned} & f(x + a, y + b, z + c) \\ & \quad \equiv \varphi(x, y, z) + xf'_a + yf'_b + zf'_e + f(a, b, c) = 0,\end{aligned}$$

et l'on a, pour calculer a, b, c, les équations

$$la + mb + nc + p = 0, \qquad \frac{f'_a}{l} = \frac{f'_b}{m} = \frac{f'_c}{n},$$

qui expriment que le centre o est l'intersection du plan donné et du diamètre de la quadrique qui est conjugué de ce plan. Les deux dernières équations montrent que, $lx + my + nz$ étant nul pour tout point x, y, z de la conique, il en est de même de $xf'_a + yf'_b + zf'_c$. Il reste donc simplement à calculer $f(a, b, c)$. A cet effet, désignons par $-2t$ la valeur commune des trois rapports précédents; il en résulte les équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}a + \mathrm{B}''b + \mathrm{B}'c + \mathrm{C} + lt &= 0,\\
\mathrm{B}''a + \mathrm{A}'b + \mathrm{B}c + \mathrm{C}' + mt &= 0,\\
\mathrm{B}'a + \mathrm{B}b + \mathrm{A}''c + \mathrm{C}'' + nt &= 0,
\end{aligned}$$

qui, multipliées respectivement par a, b, c et ajoutées ensemble, donnent

$$\mathrm{C}a + \mathrm{C}'b + \mathrm{C}''c + \mathrm{D} - f(a, b, c) + pt = 0.$$

En joignant à ces quatre équations la suivante

$$la + mb + nc + p = 0,$$

on a un système linéaire et non homogène en a, b, c, t, $f(a, b, c)$, qui donne $f(a, b, c)$ par les formules de Cramer; ou, plus simplement encore, on élimine a, b, c (en tant qu'ils figurent explicitement) et t, ce qui donne

$$\begin{vmatrix}
 & \Delta & & \mathrm{C} & l \\
 & & & \mathrm{C}' & m \\
 & & & \mathrm{C}'' & n \\
\mathrm{C} & \mathrm{C}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{D} - f(a, b, c) & p \\
l & m & n & p & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\mathrm{H}_1 - f(a, b, c)\Delta_1 = 0.$$

En conséquence, la conique est bien représentée, dans le système $oxyz$, par les équations (1) et (2).

Théorème II. — *Étant donnée la forme quadratique à trois variables $\theta(x, y, z)$, pour que le discriminant de la forme quadratique à deux variables*

$$\theta\left(x, y, -\frac{lx + my}{n}\right)$$

soit nul, il faut et il suffit que celui de la forme quadratique $\theta(x, y, z) + 2t(lx + my + nz)$ dépendant des quatre variables x, y, z, t soit nul lui-même.

En effet, lorsque le premier discriminant est nul, ou pour réduire la forme $\theta\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$ à un seul carré, qu'on peut d'ailleurs écrire

$$\varepsilon\left(ax+by-c\frac{lx+my}{n}\right)^2.$$

Par suite, $\theta(x, y, z)$ peut être mise sous la forme

$$\varepsilon(ax+by+cz)^2,$$

et, comme $2t(lx+my+nz)$ est une somme algébrique de deux carrés, la forme

$$\theta(x, y, z)+2t(lx+my+nz)$$

est réductible à trois carrés; or elle dépend de quatre variables; son discriminant est alors nul.

Réciproquement, si son discriminant est nul, cette dernière forme est réductible à moins de quatre carrés; deux sont fournis par la décomposition de

$$2t(lx+my+nz);$$

donc $\theta(x, y, z)$, qui est indépendante de t, doit se réduire à un seul carré

$$\varepsilon(ax+by+cz)^2.$$

Il en résulte que la forme à deux variables

$$\theta\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$$

se réduit à un seul carré

$$\varepsilon\left(ax+by-c\frac{lx+my}{n}\right)^2$$

et, par conséquent, que son discriminant est nul.

III. — *Recherches des longueurs des axes.*

Cela posé, voici le théorème qui fait l'objet de cette Note :

L'équation aux carrés des longueurs des demi-axes de la conique $f(X, Y, Z) = 0$, $lX + mY + nZ + p = 0$ *est* $[\rho] = 0$.

Démonstration. — Dans toutes les méthodes de démonstration qui suivent, nous supposons, pour simplifier, la conique préalablement rapportée au système $oxyz$, ce qui naturellement ne change pas la grandeur de ses axes, ni par suite l'équation demandée. Nous raisonnons donc dans le système $oxyz$, et nous représentons la conique, en vertu du Théorème I, par les équations (1) et (2).

Première méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit sommet de la conique, il faut et il suffit qu'on puisse mener par la tangente en s un plan perpendiculaire au diamètre os.

La tangente en s a pour équations

$$(3)\qquad lx + my + nz = 0, \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2K = 0.$$

L'équation générale des plans passant par cette droite est

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2K + 2t(lx + my + nz) = 0,$$

t désignant un paramètre arbitraire.

Pour que ce plan soit perpendiculaire à la droite $\overline{os}$, dont les équations sont

$$(4)\qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$(5)\qquad \frac{\varphi'_\alpha + 2lt}{\frac{1}{2}\sigma'_\alpha} = \frac{\varphi'_\beta + 2mt}{\frac{1}{2}\sigma'_\beta} = \frac{\varphi'_\gamma + 2nt}{\frac{1}{2}\sigma'_\gamma}.$$

Or, en multipliant haut et bas ces rapports respectivement par α, β, γ, et les ajoutant terme à terme, on obtient le rapport

$$\frac{\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma + 2t(l\alpha + m\beta + n\gamma)}{\frac{1}{2}(\alpha\sigma_\alpha + \beta\sigma_\beta + \gamma\sigma_\gamma)},$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$\frac{2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + 2t(l\alpha + m\beta + n\gamma)}{\sigma(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Enfin, en observant que α, β, γ satisfont aux équations (1) et (2), et en désignant par ρ la longueur du demi-axe *os*, ce rapport se réduit à $-\frac{2K}{\rho}$. Et comme, d'après son mode de formation, ce rapport est égal à chacun des rapports (5), on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha + 2lt &= 0,\\ \varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta + 2mt &= 0,\\ \varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma + 2nt &= 0.\end{aligned}\right.$$

En joignant à ces trois équations la suivante

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

et éliminant α, β, γ, t, on obtient immédiatement l'équation

$$[\rho] = 0.$$

Deuxième méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit un sommet de la conique, il faut et il suffit que la tangente à la conique en s soit perpendiculaire à os, c'est-à-dire que les droites (3) et (4) soient rectangulaires. Les coefficients directeurs de la première sont

$$m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta, \quad n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma, \quad l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha.$$

La condition de rectangularité est donc, d'après une formule connue,

$$(7) \quad (m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta)\sigma'_\alpha + (n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma)\sigma'_\beta + (l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha)\sigma'_\gamma = 0.$$

L'équation cherchée est le résultat de l'élimination de α, β, γ entre l'équation (7) et les trois suivantes, où ρ désigne l'inconnue os,

$$(8) \quad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

$$(9) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) - K = 0,$$

$$(10) \quad \sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \rho.$$

L'équation (7) peut s'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} l(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta) &+ m(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma) \\ &+ n(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (8) et (11), homogènes en l, m, n, donnent

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\beta(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha) - \gamma(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma)}{l} \\ &= \frac{\gamma(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta) - \alpha(\varphi'_\alpha\sigma'_\beta - \varphi'_\beta\sigma'_\alpha)}{m} \\ &= \frac{\alpha(\varphi'_\gamma\sigma'_\alpha - \varphi'_\alpha\sigma'_\gamma) - \beta(\varphi'_\beta\sigma'_\gamma - \varphi'_\gamma\sigma'_\beta)}{n}. \end{aligned} \right.$$

Or le numérateur du premier rapport peut s'écrire successivement

$$(\beta\sigma'_\beta + \gamma\sigma'_\gamma)\varphi'_\alpha - \sigma'_\alpha(\beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma),$$

$$(\alpha\sigma'_\alpha + \beta\sigma'_\beta + \gamma\sigma'_\gamma)\varphi'_\alpha - \sigma'_\alpha(\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma)$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$2\sigma(\alpha, \beta, \gamma)\varphi'_\alpha - 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\sigma'_\alpha,$$

et enfin, d'après (9) et (10),

$$2\rho\varphi'_\alpha + 2K\sigma'_\alpha.$$

Les numérateurs des deux autres rapports sont, de même,

$$2\rho\varphi'_\beta + 2K\sigma'_\beta, \quad 2\rho\varphi'_\gamma + 2K\sigma'_\gamma.$$

Les équations (12) deviennent donc

$$(13) \qquad \frac{\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha}{l} = \frac{\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta}{m} = \frac{\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma}{n}.$$

En désignant par $-2t$ la valeur commune de ces rapports, on en conclut les équations (6) et, par suite encore, $[\rho] = 0$.

Troisième méthode. — Pour qu'un point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit sommet de la conique, il faut et il suffit que les tangentes en s à la conique et au cercle concentrique qui passe par ce point soient parallèles.

La tangente à la conique en s est représentée par les équations (3).

Le cercle considéré étant représenté par les équations

$$(14) \qquad lx + my + nz = 0, \qquad \sigma(x, y, z) = \rho,$$

les équations de la tangente en s à ce cercle sont

$$(15) \quad lx + my + nz = 0, \qquad x\sigma'_\alpha + y\sigma'_\beta + z\sigma'_\gamma - 2\rho = 0.$$

Pour que les droites (3) et (14) soient parallèles, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{m\sigma'_\gamma - n\sigma'_\beta}{m\varphi'_\gamma - n\varphi'_\beta} = \frac{n\sigma'_\alpha - l\sigma'_\gamma}{n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma} = \frac{l\sigma'_\beta - m\sigma'_\alpha}{l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha}.$$

La somme des numérateurs, respectivement multipliés par σ'_α, σ'_β, σ'_γ, est identiquement nulle. On a donc aussi, à l'égard des dénominateurs,

$$\sigma'_\alpha(m\varphi'_\gamma - \varphi'_\beta) + \sigma'_\beta(n\varphi'_\alpha - l\varphi'_\gamma) + \sigma'_\gamma(l\varphi'_\beta - m\varphi'_\alpha) = 0.$$

C'est la relation (7). Comme on a, d'ailleurs, les relations (8), (9), (10), on voit qu'on retrouve, pour déterminer α, β, γ, ρ, exactement les mêmes équations que dans la *deuxième méthode*.

Quatrième méthode. — Pour que le point $s(\alpha, \beta, \gamma)$ soit un sommet de la conique, il faut et il suffit que le plan de la conique soit tangent au cône qui a pour sommet le centre o de la conique et pour directrice l'intersection de l'ellipsoïde avec la sphère de centre o qui passe par le point s.

Soit $\sigma(x, y, z) = \rho$ la sphère considérée. Le cône considéré a pour équation

$$\varphi(x, y, z) + \frac{K}{\rho}\sigma(x, y, z) = 0,$$

et par suite son plan tangent en s est représenté par

$$x\left(\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha\right) + y\left(\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta\right) + z\left(\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma\right) = 0.$$

Pour que ce plan se confonde avec celui de la conique, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\varphi'_\alpha + \frac{K}{\rho}\sigma'_\alpha}{l} = \frac{\varphi'_\beta + \frac{K}{\rho}\sigma'_\beta}{m} = \frac{\varphi'_\gamma + \frac{K}{\rho}\sigma'_\gamma}{n}.$$

Ce sont les équations (13), d'où l'on conclut les équations (6), et par suite $[\rho] = 0$.

Cinquième méthode. — Les valeurs cherchées de ρ sont les carrés des rayons des deux cercles concentriques et bitangents à la conique.

L'un quelconque de ces cercles est représenté par les équations (14).

Pour que la conique et le cercle considéré soient bitangents, il faut et il suffit qu'il en soit de même de leurs projections sur le plan xoy, savoir

$$\varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)+\mathrm{K}=0,$$
$$\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)-\rho=0.$$

La condition nécessaire et suffisante de bitangence de ces deux coniques est que leurs cordes communes passant par le point o, savoir

$$(16)\qquad \varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)+\frac{\mathrm{K}}{\rho}\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)=0,$$

soient confondues. Or, pour cela, il faut et il suffit que le premier membre de (16), qui est une forme quadratique à deux variables, se réduise à un seul carré et, par conséquent, que son discriminant soit nul, condition qui, en vertu du théorème II, revient à égaler à zéro le discriminant de la forme suivante à quatre variables x, y, z, t,

$$\varphi(x, y, z)+\frac{\mathrm{K}}{\rho}\sigma(x, y, z)+2t(lx+my+nz).$$

On obtient ainsi l'équation

$$[\rho]=0.$$

Cette méthode est remarquable, en ce qu'elle n'exige, comme on voit, presque aucun calcul.

Sixième méthode. — Les valeurs cherchées de ρ sont le maximum et le minimum de la fonction $\sigma(x, y, z)$, où x, y, z sont assujettis aux relations

$$lx+my+nz=0,\qquad \varphi(x, y, z)+\mathrm{K}=0.$$

On peut évidemment encore dire que ce sont le maximum et le minimum de

$$\frac{-K\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)}{\varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)}.$$

Les deux termes de cette fraction sont des fonctions homogènes du second degré en x et y, et, par conséquent, d'après la théorie élémentaire des maximum et minimum de la fraction générale du second degré, les valeurs de ρ sont les racines du discriminant de la forme

$$\varphi\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right) + \frac{K}{\rho}\sigma\left(x, y, -\frac{lx+my}{n}\right)$$

ou, ce qui revient au même, d'après le théorème II, de la suivante

$$\varphi + \frac{K}{\rho}\sigma + 2t(lx + my + nz),$$

ce qui donne

$$[\rho] = 0.$$