E. MARCHAND

Le théorème de Dupuis et la cyclide de Dupin

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 182-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__182_1>

LE THÉORÈME DE DUPUIS ET LA CYCLIDE DE DUPIN [1];

PAR M. E. MARCHAND.

6. *Définition de la cyclide de Dupin.* — Je supposerai, comme dans tout ce qui précède, qu'on ait sous les yeux la *fig.* 239 de la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse. Ceci admis, on se propose l'étude des sphères tangentes simultanément à trois sphères

[1] *Voir* même tome, p. 98.

fixes A, B, C. On a vu (n° 4) que la théorie des cycles, étendue aux sphères, permet de séparer les sphères cherchées en quatre groupes correspondant aux quatre cercles de Dupuis qui coexistent sur chaque sphère fixe telle que A; la discussion de la réalité des cercles de Dupuis se ramène immédiatement (n° 3) à celle des cercles tangents à trois cycles donnés A, B, C.

Il suffit d'examiner un des quatre groupes en particulier, par exemple celui qui, sur la *fig.* 239, est défini par les cercles de contact aa', bb', cc'. D'après ce qui précède, les trois sphères A, B, C peuvent être remplacées par une infinité d'autres ayant leur centre sur une conique bien déterminée. La surface, lieu géométrique des cercles aa' correspondant à toutes ces sphères, sera désignée par le nom de *cyclide de Dupin*.

Nous avons deux séries de sphères, les unes ayant leurs centres sur une conique ABC, les autres sur la conique focale de la précédente. Toutes les sphères de l'un des systèmes sont tangentes à toutes les sphères de l'autre et le lieu géométrique des points de contact est la cyclide. Une première classification des points de contact a fait apparaître la surface comme lieu géométrique des cercles aa' dont les centres décrivent la conique ABC; il est évident qu'en intervertissant les deux systèmes de sphères, le même lieu s'engendrera par des cercles dont les centres décrivent la conique focale de ABC. Alors par tout point de la surface passent deux cercles différents, ce qui permettra d'établir l'existence du plan tangent par la méthode utilisée dans le Cours de Géométrie descriptive pour les cônes, les cylindres et les surfaces de révolution.

Soit maintenant M un point de la cyclide. D'après ce qui précède, par ce point passent deux sphères tangentes entre elles, appartenant, l'une au premier système, l'autre au second système. Chacune de ces sphères contient un cercle de la surface passant par M; les tangentes à ces deux cercles, qui définissent le plan tangent à la cyclide, sont situées dans le plan tangent commun aux deux sphères. La surface a même plan tangent que les deux sphères au point M. On peut donc dire que chaque sphère de chaque système n'a en commun avec la cyclide qu'un petit cercle et qu'en tout point de ce petit cercle le plan tangent est le même pour les deux surfaces.

On est amené, d'une manière tout élémentaire, à considérer la surface comme enveloppe de deux systèmes différents de sphères. Les notions les plus simples de la Théorie géométrique des enveloppes font voir que la caractéristique de chaque sphère particulière, telle que A, doit être un cercle, comme limite de l'intersection de la sphère A et de la sphère infiniment voisine du même système. Le résultat obtenu par Dupuis paraît dès lors tout naturel.

J'arrive maintenant au but principal de ce Chapitre, qui est de rendre la cyclide de Dupin aussi facile à apercevoir dans l'espace que le tore et la surface des ondes. On vient de voir que trois sphères fixes A, B, C choisies au hasard servent en général à définir quatre cyclides de Dupin et la discussion faite au n° 3 indique, pour chaque position respective des trois sphères, combien il y a de cyclides réelles. Les sphères du même système que A, B et C peuvent avoir leurs centres sur une ellipse ou sur une hyperbole; si les centres sont sur une hyperbole, ceux des sphères de l'autre système seront sur une ellipse. On a donc toujours le droit, s'il ne s'agit que de classer les différentes formes que peut affecter la cyclide de Charles Dupin, de partir du mode de génération fourni par les sphères dont le centre est sur une ellipse.

D'après la discussion résumant (n° 4) les propriétés des cercles directeurs dans le cas de l'ellipse, on voit que la cyclide de Dupin ne peut offrir que trois formes différentes.

Première forme. — On prend dans un plan horizontal deux cercles ω et ω' intérieurs l'un à l'autre (*fig.* 239). On détermine le centre de similitude intérieur S et l'axe radical $A'B'C'$. Par le point S on mène une sécante quelconque qui rencontre les deux cercles ω et ω' en a et a' du même côté de S ; le cercle vertical, admettant aa' comme diamètre horizontal, engendre une cyclide lorsque le rayon vecteur Saa' tourne de 180° autour du point S. Comme on peut remplacer la surface par la sphère inscrite A pour tout ce qui est relatif au plan tangent en un point du cercle aa', on voit que les plans tangents le long du cercle considéré enveloppent un cône de révolution de sommet A_1. On obtiendra alors un point quelconque et le plan tangent en ce point, ce qui permettrait en particulier de déterminer, d'après les procédés courants de la Géométrie descriptive, la section de la surface par un plan quelconque.

Il est facile de se rendre compte que, de même que la verticale ayant son pied en S est l'axe radical commun de toutes les sphères du premier système, l'axe radical $A'B'C'$ des deux cercles ω et ω' est axe radical commun pour toutes les sphères du second système. En effet, chaque sphère du second système touche la sphère A en un point M du petit cercle aa'. La droite A_1M est une tangente à cette sphère. Il en résulte que les tangentes menées de A_1 à toutes les sphères du second système sont égales. Le point A_1, qu'on peut considérer comme un point quelconque de la droite $A'B'C'$, a même puissance par rapport à toutes les sphères du second système.

Les cercles de contact avec les sphères du second système se construisent dès lors sans aucune peine. De même que tout plan passant par la verticale S détermine deux cercles du premier mode de génération, tout plan passant par $A'B'C'$ détermine deux cercles du deuxième mode de génération.

Deuxième forme. — Les deux cercles ω et ω' sont sécants. On mène encore des rayons vecteurs par le centre de similitude interne S, et l'on suit comme précédemment le mouvement d'un cercle vertical aa'. L'axe radical $A'B'C'$ passe par les deux points d'intersection des cercles directeurs ω et ω' qui sont des points doubles pour la surface. Toutes les sphères du second système passent par les deux points doubles, et comme la surface est l'enveloppe de ces sphères, le cône des tangentes en chaque point double est l'enveloppe des plans tangents à toutes ces sphères au point double. Les rayons des sphères formant un cône de révolution qui a le point double pour sommet et l'hyperbole focale pour directrice, on voit que le cône tangent au point double sera le cône supplémentaire du premier. Ce cône est donc de révolution; comme son axe est dans le plan horizontal et qu'on a immédiatement les deux génératrices situées dans le plan horizontal, à savoir les tangentes aux cercles ω et ω', on le détermine avec la plus extrême facilité.

Troisième forme. — Les cercles ω et ω' sont de nouveau intérieurs et l'on mène maintenant des sécantes par le centre de similitude externe. La seule différence avec le premier cas est qu'au lieu de grouper les quatre points d'intersection de la sécante avec ω et ω' de manière à avoir deux cercles extérieurs, on les groupe de manière à avoir deux cercles qui se coupent sur la verticale passant par S. Si, pour préciser, je désigne les quatre points d'intersection, dans l'ordre où ils se présentent, par $aa'a'_1a_1$, au lieu d'imaginer les cercles verticaux aa' et $a_1a'_1$ on imagine les deux cercles aa'_1 et $a'a_1$. La surface présente deux points doubles comme dans le second cas; seulement ces points sont sur l'hyperbole focale et non plus sur l'ellipse. Le cône des tangentes en un de ces points doubles D est toujours de révolution. C'est le cône supplémentaire du cône qui a pour sommet D et pour base l'ellipse lieu des centres des sphères du premier système.

Quelle que soit celle de ces trois formes qu'affecte la cyclide de Dupin, les sphères inscrites du premier système ayant leurs centres sur l'ellipse s'aperçoivent sans difficulté; avec la deuxième forme on en distingue en particulier deux qui se réduisent à deux points. Les sphères du second système apparaissent moins nettement; cependant comme la section par le plan vertical passant par $\omega\omega'$ se compose de deux cercles qui se déterminent à simple vue, ces deux cercles, joints à l'hyperbole focale, permettent d'acquérir une idée suffisamment précise de la question. Aux deux points à l'infini de l'hyperbole correspondent non plus de vraies sphères, mais deux plans passant par l'axe radical commun A'B'C' et perpendiculaires respectivement aux deux asymptotes de l'hyperbole. Si l'on a affaire à la troisième forme de figure, deux sphères sont remplacées par des points.

Pour terminer, je m'en vais rappeler en quelques mots la démonstration de la propriété fondamentale des sphères de chaque système, qui consiste soit à passer par deux points réels, soit à couper orthogonalement un cercle réel.

Dans le premier et le deuxième cas, les sphères du premier système, tout en admettant pour axe radical la verticale du point S, ne se rencontrent pas en des points réels; mais le cercle orthogonal commun de centre S est réel. Dans le troisième cas, le cercle orthogonal n'existe plus, il est *imaginaire,* mais les sphères passent par deux points fixes réels de l'hyperbole focale.

Les sphères du second système ne rencontrent pas leur axe radical A′B′C′ dans le premier cas, ni dans le troisième cas; il en résulte que le cercle orthogonal, lequel a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur A′B′C′, est réel. Dans le deuxième cas au contraire, le cercle orthogonal disparaît, devient imaginaire, et toutes les sphères passent par les deux points doubles situés sur l'ellipse.

7. *Propriétés de la cyclide.* — Nous avons trouvé deux droites qui sont chacune axe radical commun de toutes les sphères d'un système et axe de similitude commun de toutes les sphères de l'autre système. M. Lemonnier, dans son étude analytique sur la cyclide (*Nouvelles Annales,* 1870), les appelle D et D′ et démontre que les deux droites ne rencontrent pas la surface à la fois, qu'une ou zéro la rencontrent. C'est précisément cette circonstance qui nous a fait distinguer trois formes distinctes de cyclide.

La propriété de ces droites d'être axe radical commun donne naissance à deux points doubles qui fournissent peut-être l'exemple le plus simple de pareille singularité qu'il soit possible d'aborder par la Géométrie élémentaire.

La propriété d'être axe de similitude commun va permettre de dire que les sections (système de deux cercles) de la cyclide par deux plans quelconques passant par une de ces droites peuvent être considérées comme transformées l'une de l'autre par semi-droites réciproques. Voici comment on peut se rendre compte de ce résultat. Je reviens à la *fig.* 239 (*Géom.* de R. et C.) et j'imagine, outre le plan du tableau, un second plan P passant par $A'B'C'$ et déterminant dans les trois sphères A, B, C des cercles α, β, γ. Le point A', étant centre d'homothétie des deux sphères B et C, est aussi centre d'homothétie des sections de ces sphères par un même plan; $A'B'C'$ est encore axe de similitude de tous les cercles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sections des sphères A, B, C, ... par le plan P. Je suppose maintenant le plan P rabattu sur le plan horizontal. Les cercles A et α, admettant $A'B'C'$ comme axe radical, peuvent être considérés comme transformés l'un de l'autre par semi-droites réciproques (*Géom.* de R. et C., n° 408); menant les tangentes communes d'un même système, on aura les directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes (*Géom.* de R. et C., n° 408). D'après ce qui a été dit auparavant, les cercles B et β forment une figure homothétique des cercles A et α, C' étant le centre d'homothétie. Les tangentes communes à B et β, étant homothétiques des tangentes communes à A et α, leur seront parallèles. Alors (*Géom.* de R. et C., n^{os} 407 et 408) la même transformation par semi-droites réciproques conduira de A à α, de B à β et par suite de C à γ, ... On peut d'ailleurs toujours s'arranger de manière que les tangentes communes qui avec $A'B'C'$ définissent la transformation soient réelles. Si A et α se coupent en deux points réels, cela est évident; si A et α se coupent en deux points imaginaires, il est clair que l'on peut toujours rabattre α du côté de $A'B'C'$ où ne se trouve pas A. Remarquons en passant que nous obtenons la solution géométrique de cette question (*Géom.* de R. et C., p. 279) : transformer par semi-droites réciproques trois cycles, tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les rencontre pas, en trois points. Il suffit de considérer les trois cycles A, B, C comme sections de trois sphères par le plan des centres. Le plan tangent commun que l'on peut mener aux trois sphères par l'axe de similitude A′B′C′ fournit la solution cherchée. La section de la cyclide par le plan horizontal étant l'enveloppe des cercles A, B, C, ... et la section par le plan P étant l'enveloppe des cercles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ transformés des premiers par semi-droites réciproques, on peut en conclure que ces deux sections sont elles-mêmes transformées l'une de l'autre par semi-droites réciproques (*Géom.* de R. et C., n° 406, p. 275).

Dans un article remarquable inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (mars 1888), M. Fouret démontre « que la cyclide de Dupin admet, comme pôles principaux d'inversion, tous les points d'un système de deux droites de directions rectangulaires » et que « la cyclide de Dupin est la seule surface ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points de deux droites ». La première partie du théorème résulte aussitôt de la méthode suivie pour définir la cyclide (n° 6). Nous prenons deux cycles $\omega\omega'$ et leur centre de similitude. La surface est donc complètement fixée dès qu'on se donne les cercles ω et ω', et il suffit de trouver une inversion qui transforme en eux-mêmes les cercles ω et ω' pour que la cyclide se transforme aussi en elle-même. Tout point de l'axe radical A′B′C′ peut évidemment être pris comme pôle d'inversion, à l'exception des deux points communs à ω et ω' qui ne sont réels pour la droite A′B′C′ que dans la deuxième forme de cyclide; si l'on prend comme pôle d'inversion l'un des points doubles de la surface, les sphères de l'un des systèmes, passant toutes par ce point D et par l'autre point double D′, se transformeront en des plans passant par le point transformé de D' et enveloppant un cône de révolution; la cyclide se transformera elle-même en ce simple cône de révolution facile à définir.

Pour transformer la cyclide en un tore par inversion, il suffit de choisir une inversion qui remplace les deux cercles ω et ω' par des cercles concentriques. On est ramené à un problème bien connu. On considère le faisceau des cercles ayant même axe radical avec ω et ω'; parmi les cercles il y en a deux qui se réduisent à deux points, les points limites du faisceau de cercles. Il n'y a qu'à prendre ces deux points limites comme pôles d'inversion pour transformer tous les cercles du faisceau et en particulier ω et ω' en des cercles concentriques. Or ces points limites ne sont réels que si les cercles ω et ω' se coupent en des points imaginaires. Relativement à la cyclide, on peut dire qu'il existe toujours des pôles réels de transformation. En effet, on a le droit de choisir soit les deux cercles ω et ω' relatifs aux sphères ayant leurs centres sur l'ellipse, soit les deux cercles ω et ω' relatifs aux sphères ayant leurs centres sur l'hyperbole. Avec la première forme de cyclide on aura quatre pôles d'inversion réels et avec la deuxième ou la troisième forme deux pôles seulement.

Toute sphère et tout plan bitangent au tore coupe cette surface suivant deux cercles; cette propriété se maintient évidemment par inversion. Tout plan et toute sphère bitangents à la cyclide couperont la surface suivant deux cercles. Ainsi, tandis que sur les surfaces du second degré il est impossible de placer une droite n'appartenant pas à l'un des deux systèmes de génératrices rectilignes, on voit qu'il existe sur la cyclide comme sur le tore des cercles qui ne font partie d'aucun des deux modes de génération de la surface.

8. *Conséquences géométriques.* — Avant de terminer, il sera peut-être bon d'énoncer les conséquences évidentes du rôle joué par le cercle orthogonal (n° 4). Ce cercle, d'après ce qui a été démontré, est bitangent à la conique. De là une série de constructions géométriques que je laisse au lecteur le soin de démontrer en toute rigueur.

1° Construire le cercle bitangent à une conique de foyers ω et ω', sachant que son centre est un point S de la droite $\omega\omega'$.

Comme S doit être centre de similitude de deux cercles de centres ω, ω' et de rayons k, $2a - k$, il sera facile de déterminer k. Les cercles directeurs ω et ω' étant connus, le cercle cherché de centre S sera déterminé comme devant passer par les points communs à ω et ω'.

On peut remplacer l'énoncé par le suivant : mener des normales à une conique par un point S de l'axe focal.

2° Une conique étant définie comme passant par trois points A, B, C et bitangente à un cercle, construire le système des deux foyers situés sur l'axe qui passe par le centre du cercle.

Des points A, B, C comme centres on décrit des cercles orthogonaux au cercle fixe. Les centres ω et ω' de deux cercles d'un même groupe tangents à la fois à A, B, C fournissent la réponse à la question; le problème peut admettre, comme on l'a vu, quatre solutions réelles ou deux, ou zéro.

Une inspection directe des positions que peut occuper un cercle bitangent à une conique montre qu'il n'y a pas à tenir compte du cas où les points A, B, C ne seraient pas tous extérieurs ou tous intérieurs au cercle fixe donné. Si les trois points sont tous extérieurs ou tous intérieurs, le calcul prouve qu'il existe quatre coniques réelles satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Chacune de ces quatre coniques a deux foyers réels, et cependant la construction de Gergonne ne les donne que si le centre du cercle est sur l'axe focal de la conique. Dans tous les autres cas, elle détermine les foyers imaginaires. Si de tous les points d'une conique comme centres on décrit les cercles coupant orthogonalement un cercle réel ou même imaginaire bitangent à la conique et ayant son centre supposé réel sur l'axe focal, ces cercles représentent des sphères dont l'enveloppe est une cyclide de Dupin réelle; si de tous les points d'une hyperbole comme centres on décrit des cercles coupant orthogonalement un cercle bitangent dont la corde de contact soit parallèle à l'axe focal, ces cercles représentent des sphères réelles dont l'enveloppe est une cyclide imaginaire. Ainsi la cyclide de Dupin peut être imaginaire, bien que l'un des systèmes de sphères dont la surface est enveloppe soit réel; les sphères de l'autre système ont leurs centres imaginaires situés sur l'ellipse imaginaire qui est focale de l'hyperbole au même titre que l'ellipse réelle.

3° Une conique étant définie par un cercle bitangent et trois points A, B, C tous extérieurs ou tous intérieurs, on demande de déterminer la corde de contact avec le cercle donné.

Si les trois points A, B, C sont extérieurs, il suffira de tracer les cercles orthogonaux au cercle fixe de centre A, B, C et de déterminer les axes de similitude de ces trois cercles. Cette construction, qui comprend comme cas particulier la détermination bien connue de la directrice d'une conique définie par un foyer et trois points, donne bien les quatre solutions du problème.

La construction est en défaut lorsque les trois points A, B, C sont intérieurs au cercle donné. Alors les quatre solutions que donne l'analyse correspondent certainement à des ellipses ayant pour corde de contact avec le cercle une parallèle à l'axe focal. Il me paraît facile d'étendre la solution à ce nouveau cas. Les centres des cercles sont réels A, B, C; les rayons sont imaginaires, mais définis par la puissance des points A, B, C relativement au cercle fixe. On appellera axe de similitude des trois cercles orthogonaux une droite telle que ses distances à A, B, C soient proportionnelles aux racines carrées des valeurs absolues des puissances des trois points A, B, C par rapport au cercle fixe.

De cette manière on déterminera, dans tous les cas où il existe des solutions réelles, des éléments géométriques suffisants pour tracer effectivement les coniques cherchées.

4° Construire les foyers ordinaires d'une conique définie par un foyer F dans l'espace et trois points A, B, C.

On décrira des trois points donnés A, B, C comme centres des sphères passant par le foyer F donné. Les centres ω et ω' de deux cercles d'un même groupe tangents à la fois aux trois cercles de section des sphères par le plan ABC constitueront une des solutions du problème. Comme on a dans le plan ABC trois cercles sécants deux à deux, les huit cercles du problème d'Apollonius sont réels (n° 3). On trouve quatre solutions toujours réelles. Le cas exceptionnel trouvé plus haut, (2°) lorsqu'on donnait un cercle bitangent au lieu d'un foyer, a disparu. Cela tient évidemment à ce que la projection de tout foyer réel d'une conique se fait sur l'axe focal, de sorte que le foyer correspond à un cercle bitangent imaginaire ayant son centre réel sur l'axe focal, comme le montre aussitôt la correspondance que l'analyse établit entre les foyers réels et les cercles bitangents imaginaires d'une part, entre les foyers imaginaires et les cercles bitangents réels d'autre part.

5° Déterminer une surface de révolution du second degré qui passe par quatre points donnés et qui soit circonscrite à une sphère donnée.

L'étude directe des positions diverses que peut occuper une sphère inscrite à la surface engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes montre qu'on ne peut espérer de solution réelle que si les quatre points donnés A, B, C, D sont tous extérieurs ou tous intérieurs à la sphère donnée.

Le plan du cercle de contact se déterminera comme plan d'homothétie de quatre sphères orthogonales à la sphère fixe et de centres A, B, C, D. J'ai d'ailleurs indiqué précédemment comment il faut s'y prendre pour conserver cette construction même dans le cas où les quatre points A, B, C, D sont tous intérieurs à la sphère. On a huit solutions, puisqu'il y a huit plans d'homothétie.

Le cercle de contact peut être réel ou imaginaire; dans tous les cas, l'axe de la surface est déterminé comme perpendiculaire abaissée du centre radical des quatre sphères sur leur plan d'homothétie.

Le cercle de contact ne peut qu'être réel si la conique a tourné autour de son axe non focal. Le cercle peut être imaginaire dans le cas d'une ellipse ou hyperbole tournant autour de l'axe focal. Or, précisément dans ce dernier cas, la surface admet deux foyers réels que l'on pourra déterminer comme centres de deux sphères d'un même groupe tangentes à la fois aux quatre sphères décrites de A, B, C, D comme centres.

Ainsi donc, si la surface est soit un ellipsoïde allongé, soit un hyperboloïde à deux nappes et qu'on désigne par ω et ω' les foyers réels, ces deux points seront les centres de sphères tangentes aux quatre sphères A,B,C,D qui jouent dans la question le même rôle que les deux cercles directeurs d'une ellipse (n° 4) utilisés pour définir la cyclide. Tout point de la surface est centre d'une sphère tangente aux deux sphères ω et ω'.

De ce que la somme ou la différence des distances de tout point de la surface aux deux foyers ω et ω' est constante, on conclurait aisément que toute section plane est une conique admettant ω et ω' comme foyers (n° 2). Ce résultat peut encore s'établir ainsi :

Lorsqu'on fait tourner une conique autour de son axe focal, la directrice D correspondant au foyer réel F décrit un plan P, et la surface peut être considérée comme lieu des points dont le rapport des distances au point F et au plan P est constant. La section de la surface par un plan quelconque Q sera le lieu des points dont le rapport des distances au point F et à la droite Δ, intersection de P et de Q, est constant (*voir* n° 2). Le rapport des distances d'un point de la section plane au point F et à un plan fixe quelconque passant par Δ sera aussi constant; or, si l'on prend le plan qui passe par Δ et par F, on voit (n° 2) que F sera le sommet d'un cône de révolution passant par la section plane. La section de la surface, ellipsoïde de révolution allongé ou hyperboloïde de révolution à deux nappes, par un plan quelconque Q, sera donc une section conique dont la courbe focale passera par les foyers de la surface.

9. *Conclusion*. — Après ce qui a été dit au début, il est à peine besoin de conclure.

Presque partout je me suis appuyé uniquement sur les éléments de Géométrie. J'espérais même éviter toute intervention explicite de l'Algèbre quand je me suis aperçu que la démonstration de Gergonne, telle qu'on la présente dans la plupart des traités classiques, ne pouvait pas me servir de point de départ à cause de son manque de généralité. La distinction des groupes fondée en partie sur ce que deux cercles d'un même groupe seraient toujours tangents de manière différente à chacun des cercles fixes ne peut être maintenue que dans quelques cas particuliers. La méthode des cycles réussit au contraire toujours, comme je crois l'avoir démontré rigoureusement par le calcul.

Avant de penser aux cycles, que je ne connais que depuis peu, grâce au *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et Ch. de Comberousse, j'avais eu l'idée de m'appuyer sur ce théorème : « Le lieu des points tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant est une section conique ». Mais le théorème de Dandelin, sur lequel je comptais m'appuyer, ne permet d'établir la proposition que pour les cercles bitangents ayant leur centre sur l'axe focal, bien qu'elle soit vraie encore pour les cercles bitangents en deux points réels qui ont leur centre sur l'axe non focal. Or, dans le paragraphe précédent (n° 8; 2°), on a vu que les cercles bitangents de cette seconde sorte intervenaient pour donner les sphères réelles d'un système d'une cyclide d'ailleurs imaginaire. C'est cette objection qui m'a fait renoncer à cette marche séduisante au premier abord comme tout à fait géométrique.