

ISSALY

**Théorie des systèmes triples de
pseudo-surfaces**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 204-222

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_204_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES SYSTÈMES TRIPLES DE PSEUDO-SURFACES;

 PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

PRÉLIMINAIRES.

1. Dans un Mémoire sur les congruences de droites ⁽¹⁾, nous avons, pour la première fois, qualifié de *pseudo-surface* le lieu géométrique de nouvelle espèce que forment deux systèmes de courbes variables lorsqu'elles s'entrecoupent, non pas rigoureusement comme sur toute surface, mais aux infiniment petits du second ordre près, tout au plus.

De pareils lieux ne peuvent pas, il est vrai, être représentés par une équation finie en x, y, z ; mais ils offrent, du moins, entre autres avantages, celui de donner une signification géométrique très simple à toutes les équations différentielles totales de la forme

$$dz = \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy,$$

qui ne sont pas intégrables, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} > \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

ce qui est, comme on le sait, le cas le plus commun.

Cette remarque faite, concevons que, au lieu des deux courbes requises pour la génération de toute pseudo-surface, on en prenne trois concourant en un

(1) Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI.

Voir aussi : t. XVII du même Bulletin, un second Mémoire intitulé : *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces*.

même point M, au degré d'approximation ci-dessus indiqué. En les associant tout d'abord deux à deux, ces courbes engendreront, comme lignes coordonnées, trois pseudo-surfaces dont elles pourront être regardées comme les intersections mutuelles.

A leur tour, par leurs déplacements successifs, ces trois pseudo-surfaces définiront un système de coordonnées à trois dimensions, entièrement comparable à celui que forment les trois familles de surfaces qu'elles ont pour limites respectives; d'où l'on peut prévoir déjà que les propriétés de nos systèmes triples de pseudo-surfaces fourniront, à l'aide de quelques conditions complémentaires, toutes celles dont jouissent les familles de surfaces correspondantes.

Proposons-nous donc d'établir les relations fondamentales qui régissent les premiers de ces systèmes, et, afin de traiter le problème dans toute sa généralité, supposons, dès à présent, que les trois pseudo-surfaces coordonnées se coupent sous des angles variables quelconques.

2. Soient $(a, b, c), \dots, (a_1, b_1, c_1), \dots$ les cosinus directeurs des angles que les arêtes de deux trièdres *supplémentaires* $Mxyz$ et $Mx_1y_1z_1$ font avec les arêtes d'un trièdre *quelconque* $OXYZ$ ou (T) considéré comme fixe; nous aurons pour formules de transformation des coordonnées

$$(1) \begin{cases} X + Y \cos n + Z \cos m = ax + a'y + a''z = a_1x_1 + a'_1y_1 + a''_1z_1, \\ X \cos n + Y + Z \cos l = bx + b'y + b''z = b_1x_1 + b'_1y_1 + b''_1z_1, \\ X \cos m + Y \cos l + Z = cx + c'y + c''z = c_1x_1 + c'_1y_1 + c''_1z_1. \end{cases}$$

Faisant coïncider isolément chacun des deux trièdres mobiles avec le trièdre (T) (ce qui est permis, puisque

ce dernier est quelconque), on aura

$$(2) \quad \begin{cases} x + y \cos \nu + z \cos \mu = x = x_1 \cos(x, x_1), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 + y_1 \cos \nu_1 + z_1 \cos \mu_1 = x_1 = x \cos(x, x_1). \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

formules dans lesquelles (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) représentent les projections *orthogonales* sur les arêtes des deux trièdres du point de l'espace que l'on considère.

Nous désignerons, pour abrégé, par ξ, τ, ζ les angles xMx_1, yMy_1, zMz_1 . Entre les projections orthogonales dont nous venons de parler, il viendra alors ces relations secondaires

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{x_1}{\cos \xi} + \frac{y_1 \cos \nu}{\cos \tau} + \frac{z_1 \cos \mu}{\cos \zeta}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x}{\cos \xi} + \frac{y \cos \nu_1}{\cos \tau_1} + \frac{z \cos \mu_1}{\cos \zeta}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Comme d'ailleurs

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \sin \mu \sin \nu_1 = \sin \mu_1 \sin \nu, \\ \cos \tau &= \sin \nu \sin \lambda_1 = \sin \nu_1 \sin \lambda, \\ \cos \zeta &= \sin \lambda \sin \mu_1 = \sin \lambda_1 \sin \mu. \end{aligned}$$

il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda_1} = \frac{\sin \mu}{\sin \mu_1} = \frac{\sin \nu}{\sin \nu_1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta_1}},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu_1 & \cos \mu_1 \\ \cos \nu_1 & 1 & \cos \lambda_1 \\ \cos \mu_1 & \cos \lambda_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\Delta = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \mu \sin^2 \nu,$$

$$\Delta_1 = \sin^2 \lambda \sin^2 \mu_1 \sin^2 \nu_1.$$

Nous aurons aussi besoin de savoir exprimer les **co-**
sinus a, a', a'', \dots en fonction des cosinus $\alpha_1, \alpha'_1,$
 α''_1, \dots , et *vice versa*, quand les trièdres mobiles ont
repris une position quelconque par rapport au trièdre
fixe. On trouve à cet effet

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\alpha_1}{\cos \xi} + \frac{\alpha'_1 \cos \nu}{\cos \tau_1} + \frac{\alpha''_1 \cos \mu}{\cos \zeta}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{a}{\cos \xi} + \frac{a' \cos \nu_1}{\cos \tau_1} + \frac{a'' \cos \mu_1}{\cos \zeta}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

I. — RELATIONS DIFFÉRENTIELLES.

3. Soient $(\vec{x}), (\vec{x}'), (\vec{x}'')$ les trois pseudo-surfaces
coordonnées respectivement tangentes en M aux faces
du trièdre Mxyz. Désignons par (s), (s'), (s'') leurs
courbes d'intersection, en pseudo-contact avec les arêtes
du trièdre; et soient ρ, ρ', ρ'' les rayons de première
courbure de ces mêmes lignes.

De ce que les rayons ρ, ρ', ρ'' appartiennent nécessairement
aux faces du trièdre supplémentaire $Mx_1y_1z_1$,
il résulte que l'on a les relations connues

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\cos(\rho, \lambda)}{\rho} = \frac{\alpha'_1}{\rho_{y_1}} + \frac{\alpha''_1}{\rho_{z_1}},$$

$$\frac{\partial a'}{\partial s'} = \frac{\cos(\rho', \lambda)}{\rho'} = \frac{\alpha''_1}{\rho'_{z_1}} - \frac{\alpha_1}{\rho'_{x_1}},$$

$$\frac{\partial a''}{\partial s''} = \frac{\cos(\rho'', \lambda)}{\rho''} = \frac{\alpha_1}{\rho''_{x_1}} - \frac{\alpha'_1}{\rho''_{y_1}}.$$

Posant, par analogie,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s'} = \frac{\cos(\varpi', \lambda)}{\varpi'} = \frac{a'_1}{\varpi'_{\gamma_1}} + \frac{a''_1}{\varpi'_{z_1}},$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial s''} = \frac{\cos(\varpi'', \lambda)}{\varpi''} = \frac{a_1}{\varpi''_{z_1}} + \frac{a'_1}{\varpi''_{\gamma_1}},$$

$$\frac{\partial \alpha''}{\partial s} = \frac{\cos(\varpi, \lambda)}{\varpi} = \frac{a_1}{\varpi_{x_1}} + \frac{a'_1}{\varpi_{y_1}};$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s''} = \frac{\cos(\gamma'', \lambda)}{\gamma''} = \frac{a'_1}{\gamma''_{\gamma_1}} + \frac{a''_1}{\gamma''_{z_1}},$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial s} = \frac{\cos(\gamma, \lambda)}{\gamma} = \frac{a''_1}{\gamma_{z_1}} + \frac{a_1}{\gamma_{x_1}},$$

$$\frac{\partial \alpha''}{\partial s'} = \frac{\cos(\gamma', \lambda)}{\gamma'} = \frac{a_1}{\gamma'_{x_1}} + \frac{a'_1}{\gamma'_{y_1}},$$

on reconnaît dans $\frac{1}{\varpi}, \dots, \frac{1}{\gamma}, \dots$ ce que nous avons nommé ailleurs les *courbures corrélatives* ou *alternantes des lignes coordonnées*.

Actuellement, différencions par rapport à s, s', s'' les valeurs des cosinus des faces du premier trièdre, savoir :

$$\begin{aligned} D \cos \lambda = & (a \alpha' + b'' b' + b' c') \alpha'' \\ & + (b'' \alpha' + a' b' + b c') b'' + (b' \alpha' + b b' + a'' c') c'' \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

valeurs où l'on a fait, avec $D = \begin{vmatrix} 1 & \cos n & \cos m \\ \cos n & 1 & \cos l \\ \cos m & \cos l & 1 \end{vmatrix},$

$$\begin{aligned} \sin^2 l &= a, & \cos m \cos n - \cos l &= b, \\ \sin^2 m &= a', & \cos n \cos l - \cos m &= b', \\ \sin^2 n &= a'', & \cos l \cos m - \cos n &= b''; \end{aligned}$$

puis, faisons coïncider le trièdre $Mxyz$ avec le trièdre fixe; on trouvera, après réduction, les neuf relations

suivantes

$$\begin{aligned} -\frac{\sin \nu_1}{\varpi_{y_1}} &= \frac{\sin \mu_1}{\gamma_{z_1}} + \frac{\partial \lambda}{\partial s}, \\ -\frac{\sin \lambda_1}{\hat{\rho}_{z_1}} &= \frac{\sin \nu_1}{\varpi_{x_1}} + \frac{\partial \mu}{\partial s}, \\ -\frac{\sin \mu_1}{\gamma_{x_1}} &= \frac{\sin \lambda_1}{\hat{\rho}_{y_1}} + \frac{\partial \nu}{\partial s}, \\ -\frac{\sin \nu_1}{\gamma_{\lambda_1}} &= \frac{\sin \mu_1}{\hat{\rho}_{z_1}} + \frac{\partial \lambda}{\partial s'}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

que nous écrirons plus simplement ainsi

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} l_1 &= p_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial s}, \\ m_1 &= q_1 - \frac{\partial \mu}{\partial s}, \\ n_1 &= r_1 + \frac{\partial \nu}{\partial s}, \\ l'_1 &= p'_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial s'}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Substituant ces valeurs dans les dérivées partielles ci-dessus, il viendra

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \lambda_1 &= \alpha'_1 r_1 - \alpha''_1 m_1, \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial s} \sin \mu_1 &= \alpha''_1 p_1 - \alpha_1 n_1, \\ \frac{\partial \alpha''}{\partial s} \sin \nu_1 &= \alpha_1 q_1 - \alpha'_1 l_1. \end{aligned} \right.$$

premier système *général*, relatif à la variable s .

Ce système devra être complété par deux autres relatifs à s' et à s'' ; mais ceux-ci se déduisent aussitôt du précédent, car il suffit d'y affecter, d'un ou de deux accents les composantes qui y entrent.

4. Les trois systèmes que nous venons de former correspondent, par a, a', a'' , au premier des trièdres coordonnés $Mxyz$. Il s'agit d'obtenir les trois systèmes corrélatifs qui correspondent, par a_1, a'_1, a''_1 , au second trièdre $Mx_1y_1z_1$.

Pour cela, nous ferons observer que, en vertu des propriétés connues des trièdres supplémentaires, on a

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \cos \mu \cos \nu - \sin \mu \sin \nu \cos \lambda_1, \\ \cos \lambda_1 &= \cos \mu_1 \cos \nu_1 - \sin \mu_1 \sin \nu_1 \cos \lambda;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \lambda}{\partial s} \cos \xi = \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} + \frac{\partial \mu_1}{\partial s} \cos \nu + \frac{\partial \nu_1}{\partial s} \cos \mu, \\ -\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} \cos \xi = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial s} \cos \nu_1 + \frac{\partial \nu}{\partial s} \cos \mu_1, \end{cases}$$

ce qui montre incidemment (2) et (2') que les variations (alternées) des faces des deux trièdres pourront toujours, si besoin est, être assimilées au signe près aux projections obliques d'un même segment issu de l'origine.

Ceci posé, abordons directement la question, en différenciant par rapport à s la valeur (4') de a_1 mise sous la forme entière

$$a_1 \sin \lambda \sin \mu_1 \sin \nu_1 = a \sin \lambda_1 + a' \sin \mu_1 \cos \nu_1 + a'' \sin \nu_1 \cos \mu_1.$$

Après avoir remplacé dans l'équation dérivée $\cos \lambda$ par sa valeur ci-dessus et $\frac{\partial \lambda}{\partial s}$ par la suivante

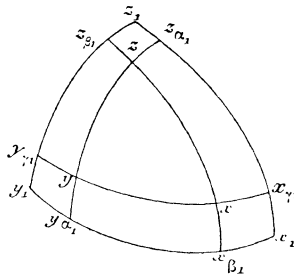
$$-\frac{\partial \lambda}{\partial s} \cos \xi = l_1 - p_1 + (m_1 - q_1) \cos \nu + (n_1 - r_1) \cos \mu,$$

déduite de (7) et de (5), on sera conduit par le calcul lui-même à considérer les trois trièdres bi-rectangles auxiliaires $M_x)_{y_1, z_{\beta_1}}$, $M_y)_{z_{\alpha_1}, x_{\gamma_1}}$ et $M_z)_{x_{\beta_1}, y_{\alpha_1}}$, et cela, en

posant

$$(8) \begin{cases} m_1 - r_1 \cos \lambda_1 = m_{\gamma_1} \sin \lambda_1, & r_1 - m_1 \cos \lambda_1 = r_{\beta_1} \sin \lambda_1, \\ n_1 - p_1 \cos \mu_1 = n_{\alpha_1} \sin \mu_1, & p_1 - n_1 \cos \mu_1 = p_{\gamma_1} \sin \mu_1, \\ l_1 - q_1 \cos \nu_1 = l_{\beta_1} \sin \nu_1, & q_1 - l_1 \cos \nu_1 = q_{\alpha_1} \sin \nu_1. \end{cases}$$

Ce premier système de trièdres auxiliaires en appelle un second, réciproque du premier, celui des trièdres



$M_{x_1}, \gamma_{\alpha_1}, z_{\alpha_1}, \dots$ que l'on introduit à son tour, implicitement lui aussi, en posant, dans les résultats trouvés,

$$(9) \begin{cases} q_{\alpha_1} + n_{\alpha_1} \cos \lambda = q \sin \lambda, & n_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \cos \lambda = n \sin \lambda, \\ r_{\beta_1} + l_{\beta_1} \cos \mu = r \sin \mu, & l_{\beta_1} + r_{\beta_1} \cos \mu = l \sin \mu, \\ p_{\gamma_1} + m_{\gamma_1} \cos \nu = p \sin \nu, & m_{\gamma_1} + p_{\gamma_1} \cos \nu = m \sin \nu. \end{cases}$$

Il vient ainsi finalement, pour le premier des systèmes (analytiques) corrélatifs que nous voulions obtenir,

$$(10) \begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \sin \lambda = \alpha' n - \alpha'' q, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \sin \mu = \alpha' l - \alpha' r, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \sin \nu = \alpha' m - \alpha' p. \end{cases}$$

Par de simples accents, on en déduira les deux autres en s' et s'' .

Bien que le nouveau groupe de systèmes généraux soit

équivalent au premier, il ne nous sera pas moins utile que lui dans les applications.

5. 1° Comme corollaire, si l'on forme, à l'aide du Tableau (9), les différences $l - p$, $m - q$, $n - r$ et qu'on rapproche les résultats des formules (7), on trouvera

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = p - \frac{\partial \lambda_1}{\partial s}, \\ m = q - \frac{\partial \mu_1}{\partial s}, \\ n = r - \frac{\partial \nu_1}{\partial s}, \\ l' = p' - \frac{\partial \lambda_1}{\partial s'}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

ce qui met pleinement en évidence la corrélation des deux groupes de systèmes.

2° Remarquons encore que de (8) et (9) on tire, entre autres valeurs,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{z_1} = \frac{q_1 - l_1 \cos \nu_1}{\sin \nu_1} = \frac{q - n \cos \lambda}{\sin \lambda}, \\ n_{z_1} = \frac{n_1 - p_1 \cos \mu_1}{\sin \mu_1} = \frac{n - q \cos \lambda}{\sin \lambda}. \end{array} \right.$$

Ces formules nous seront bientôt nécessaires.

II. — ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES TRIPLES DE PSEUDO-SURFACES.

6. Si l'on développe, à l'aide des formules (6), les calculs indiqués par les trois identités en a , a' , a'' ,

$$\frac{\partial \frac{\partial a}{\partial s''}}{\partial s'} = \frac{\partial \frac{\partial a}{\partial s'}}{\partial s''},$$

.....

on trouvera

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p'_1}{\partial s''} - \frac{\partial p''_1}{\partial s'} \right) \sin \lambda = q' n'' - n' q'' = G, \\ \left(\frac{\partial q'_1}{\partial s''} - \frac{\partial q''_1}{\partial s'} \right) \sin \mu = r' l'' - l' r'' = H, \\ \left(\frac{\partial r'_1}{\partial s''} - \frac{\partial r''_1}{\partial s'} \right) \sin \nu = p' m'' - m' p'' = K. \end{array} \right.$$

Passant aux identités

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha_1}{\partial s''}}{\partial s'} = \frac{\partial \frac{\partial \alpha_1}{\partial s'}}{\partial s''},$$

.....

il viendra semblablement, au moyen de (10),

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial l'}{\partial s''} - \frac{\partial l''}{\partial s'} \right) \sin \lambda_1 = m'_1 r''_1 - r'_1 m''_1 = G_1, \\ \left(\frac{\partial m'}{\partial s''} - \frac{\partial m''}{\partial s'} \right) \sin \mu_1 = n'_1 p''_1 - p'_1 n''_1 = H_1, \\ \left(\frac{\partial n'}{\partial s''} - \frac{\partial n''}{\partial s'} \right) \sin \nu_1 = l'_1 q''_1 - q'_1 l''_1 = K_1. \end{array} \right.$$

Ce sont les équations que nous voulions établir. Elles méritent, ce nous semble, le nom de *fondamentales*, à un tout autre titre que celles qui leur correspondent dans la théorie des surfaces, puisqu'elles en constituent comme on le verra, une haute généralisation.

Il est bon d'observer que les fonctions binômes, G, H, K, G₁, ... qui les composent, peuvent s'obtenir directement, c'est-à-dire sans différentiation; car, de (6) et de (10), on tire aussitôt

$$\sin^2 \lambda_1 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial a}{\partial s'} & \frac{\partial a}{\partial s''} \\ \frac{\partial b}{\partial s'} & \frac{\partial b}{\partial s''} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a'_1 & a''_1 \\ b'_1 & b''_1 \end{array} \right| = m'_1 r''_1 - r'_1 m''_1 = G_1,$$

.....;

$$\sin^2 \lambda \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial a_1}{\partial s'} & \frac{\partial a_1}{\partial s''} \\ \frac{\partial b_1}{\partial s'} & \frac{\partial b_1}{\partial s''} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a' & a'' \\ b' & b'' \end{array} \right| = q' n'' - n' q'' = G,$$

.....

7. *Cas particulier.* — Arrêtons-nous au cas où les trois pseudo-surfaces coordonnées se couperaient sous des angles *constants*. Les variations des faces étant alors nulles, par hypothèse, il faut écrire que

$$(15) \quad \begin{cases} l = p, & m = q, & n = r, \\ l_1 = p_1, & m_1 = q_1, & n_1 = r_1. \end{cases}$$

Les systèmes généraux (6) et (10) deviennent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} \sin \lambda_1 &= a'_1 r_1 - a''_1 q_1, & \frac{\partial a_1}{\partial s} \sin \lambda &= a' r - a'' q, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} \sin \mu_1 &= a''_1 p_1 - a_1 r_1, & \frac{\partial a'_1}{\partial s} \sin \mu &= a'' p - a r, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} \sin \nu_1 &= a_1 q_1 - a'_1 p_1, & \frac{\partial a''_1}{\partial s} \sin \nu &= a n - a' p. \end{aligned}$$

Quant aux équations fondamentales, on a, pour correspondre à (13),

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p'_1}{\partial s''} - \frac{\partial p''_1}{\partial s'} \right) \sin \lambda = q' r'' - r' q'' = \zeta, \\ \left(\frac{\partial q'_1}{\partial s''} - \frac{\partial q''_1}{\partial s'} \right) \sin \mu = r' p'' - p' r'' = \eta, \\ \left(\frac{\partial r'_1}{\partial s''} - \frac{\partial r''_1}{\partial s'} \right) \sin \nu = p' q'' - q' p'' = \xi. \end{array} \right.$$

et, pour correspondre à (14),

$$(14') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p'}{\partial s''} - \frac{\partial p''}{\partial s'} \right) \sin \lambda_1 = q'_1 r''_1 - r'_1 q''_1 = \zeta_1, \\ \left(\frac{\partial q'}{\partial s''} - \frac{\partial q''}{\partial s'} \right) \sin \mu_1 = r'_1 p''_1 - p'_1 r''_1 = \eta_1, \\ \left(\frac{\partial r'}{\partial s''} - \frac{\partial r''}{\partial s'} \right) \sin \nu_1 = p_1 q''_1 - q_1 p''_1 = \xi_1. \end{array} \right.$$

Introduisons, en dernier lieu, dans (8) et (9), les conditions (15), on aura, entre autres résultats,

$$p = \frac{p_1}{\cos \xi} + \frac{q_1 \cos \nu}{\cos \tau_1} + \frac{r_1 \cos \mu}{\cos \zeta},$$

.....;

$$p_1 = \frac{p}{\cos \xi} + \frac{q \cos \nu_1}{\cos \tau_1} + \frac{r \cos \mu_1}{\cos \zeta},$$

.....

Que si l'on compare ces valeurs avec les formules (3 et (3'), on voit que les quantités p, q, r et p₁, q₁, r₁ ne sont autres, dans le cas actuel, que les projections orthogonales d'un même segment issu de l'origine.

Ce segment intervient en Cinématique; il mesure la vitesse instantanée de rotation ω d'un corps solide autour d'un point fixe.

En désignant par p, q, r et p₁, q₁, r₁ les projections obliques correspondantes; il résulte des formules (2) et (2') que l'on a aussi

$$p + q \cos \nu + r \cos \mu = p = p_1 \cos \xi,$$

.....;

$$p_1 + q_1 \cos \nu_1 + r_1 \cos \mu_1 = p_1 = p \cos \xi,$$

.....

Les équations du segment ω, ou mieux, de l'axe instantané coïncidant, admettent dès lors cette double forme

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{\rho}{\omega},$$

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} = \frac{\rho}{\omega},$$

avec

$$\omega^2 = \Sigma p^2 + 2 \Sigma q r \cos \lambda = \Sigma p_1^2 + 2 \Sigma q_1 r_1 \cos \lambda_1.$$

Les composantes p', q', r' et p'', q'', r'' donneraient lieu à des considérations de même nature, sur lesquelles nous ne saurions insister ici.

III. — APPLICATION AUX SYSTÈMES TRIPLES DE SURFACES.
GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DUPIN RELATIF AUX
SURFACES ORTHOGONALES.

8. Cherchons d'abord les conditions qui permettent de transformer les pseudo-surfaces coordonnées (\mathcal{F}) , (\mathcal{F}') et (\mathcal{F}'') en leurs limites respectives qui seront les surfaces coordonnées (F) , (F') et (F'') .

Pour cela, au lieu de considérer les arcs ds , ds' , ds'' comme indépendants, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici, concevons qu'ils soient des fonctions données A , A' , A'' de trois paramètres quelconques u , u' , u'' , et, conséquemment, posons

$$ds = A du, \quad ds' = A' du', \quad ds'' = A'' du'',$$

avec

$$dS^2 = \Sigma A^2 du^2 + 2 \Sigma A' A'' du' du'' \cos \lambda$$

pour l'arc résultant dS .

Si l'on désigne par (X, Y, Z) les coordonnées de l'origine M par rapport au trièdre fixe (T) , on aura

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A a, \quad \frac{\partial X}{\partial u'} = A' a', \quad \frac{\partial X}{\partial u''} = A'' a''.$$

Des deux dernières, par exemple, on conclut que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u' \partial u''} &= A' \frac{\partial a'}{\partial u''} + a' \frac{\partial A'}{\partial u''}, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u'' \partial u'} &= A'' \frac{\partial a''}{\partial u'} + a'' \frac{\partial A''}{\partial u'}; \end{aligned}$$

d'où

$$A' A'' \frac{\partial a'}{\partial s''} + a' \frac{\partial A'}{\partial u''} = A' A'' \frac{\partial a''}{\partial s'} + a'' \frac{\partial A''}{\partial u'}.$$

Substituant à $\frac{\partial a'}{\partial s''}$, $\frac{\partial a''}{\partial s'}$ leurs valeurs déduites des systèmes dont (6) est le type et égalant ensuite entre eux

les coefficients de a , a' , a'' , on trouve, pour transformer la pseudo-surface $(\tilde{\mathcal{F}})$, tangente au plan des $y z$, en la surface correspondante (F') , les conditions

$$(F) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A'A''I_1 \sin \lambda = \frac{\partial A'}{\partial u''} - \frac{\partial A''}{\partial u'} \cos \lambda, \\ A'A''p_1'' \sin \lambda = \frac{\partial A''}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u''} \cos \lambda, \\ \frac{q_1' - I_1' \cos \nu_1}{\sin \nu_1} + \frac{n_1'' - p_1'' \cos \mu_1}{\sin \mu_1} = 0, \end{array} \right.$$

cette dernière pouvant aussi, d'après (12), s'écrire

$$(15) \quad \frac{q' - n' \cos \lambda}{\sin \lambda} + \frac{n'' - q'' \cos \lambda}{\sin \lambda} = 0$$

ou mieux

$$(15') \quad q' + n'' - (n' + q'') \cos \lambda = 0.$$

Si l'on fait un calcul semblable sur l'identité

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u'' \partial u} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u''},$$

on trouvera, pour transformer $(\tilde{\mathcal{F}}')$ en (F') ,

$$(F') \quad \left\{ \begin{array}{l} -A''A m_1'' \sin \mu = \frac{\partial A''}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u''} \cos \mu, \\ A''A q_1 \sin \mu = \frac{\partial A}{\partial u''} - \frac{\partial A''}{\partial u} \cos \mu, \\ \frac{r_1'' - m_1'' \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1} + \frac{l_1 - q_1 \cos \nu_1}{\sin \nu_1} = 0. \end{array} \right.$$

Enfin, de l'identité $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u'} = \frac{\partial^2 X}{\partial u' \partial u}$, on tirera, pour transformer $(\tilde{\mathcal{F}}'')$ en (F'') ,

$$(F'') \quad \left\{ \begin{array}{l} -AA'n_1 \sin \nu = \frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \nu, \\ AA'r_1' \sin \nu = \frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \nu, \\ \frac{p_1 - n_1 \cos \mu_1}{\sin \mu_1} + \frac{m_1' - r_1' \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1} = 0. \end{array} \right.$$

Rapprochant du type (12) les trois conditions indépendantes de Λ , Λ' , Λ'' , on voit qu'elles peuvent être mises sous la forme

$$(16) \quad q'_{\alpha_1} + n''_{\alpha_1} = 0, \quad r''_{\beta_1} + l_{\beta_1} = 0, \quad p_{\gamma_1} + m'_{\gamma_1} = 0.$$

Lorsque les surfaces coordonnées sont orthogonales, ces conditions se réduisent à

$$(16') \quad q' + r'' = 0, \quad r'' + p = 0, \quad p + q' = 0$$

et, par conséquent, à

$$(16'') \quad p = q' = r'' = 0.$$

Ceci va nous conduire à d'intéressantes remarques.

9. 1^o Par des considérations dont l'exposé nous entraînerait trop loin, on peut prouver que, dans le cas notamment où les trois pseudo-surfaces coordonnées se coupent sous des angles invariables, les équations de leurs lignes asymptotiques sont respectivement pour chacune

$$(17) \quad \begin{cases} r'_{\alpha_1} ds'^2 - (q'_{\alpha_1} - r''_{\alpha_1}) ds' ds'' - q''_{\alpha_1} ds''^2 = 0, \\ p''_{\beta_1} ds''^2 - (r''_{\beta_1} - p_{\beta_1}) ds'' ds - r_{\beta_1} ds^2 = 0, \\ q_{\gamma_1} ds^2 - (p_{\gamma_1} - q'_{\gamma_1}) ds ds' - p'_{\gamma_1} ds'^2 = 0. \end{cases}$$

Quant aux lignes de courbure de ces mêmes pseudo-surfaces, elles sont représentées par le système

$$(18) \quad \begin{cases} q' ds'^2 + (r' + q'') ds' ds'' + r'' ds''^2 = 0, \\ r'' ds''^2 + (p'' + r) ds'' ds + p ds^2 = 0, \\ p ds^2 + (q + p') ds ds' + q' ds'^2 = 0. \end{cases}$$

Or, dans le cas présent, les conditions générales (16) reviennent, d'après (12), à

$$\begin{aligned} q' + r'' - (r' + q'') \cos \lambda &= 0, \\ r'' + p - (p'' + r) \cos \mu &= 0, \\ p + q' - (q + p') \cos \nu &= 0. \end{aligned}$$

Elles expriment donc que les lignes de courbure (18) sont devenues rectangulaires, ce qui est, on le sait, une des propriétés caractéristiques des surfaces. C'est une première vérification.

2° Pour que les pseudo-surfaces coordonnées se coupent suivant leurs lignes de courbure, il faut et il suffit que les équations (18) prennent les formes réduites

$$B \, ds' \, ds'' = 0, \quad B' \, ds'' \, ds = 0, \quad B'' \, ds \, ds' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$p = q' = r'' = 0.$$

Quand les pseudo-surfaces se coupent à angles droits, ces conditions deviennent

$$p = q' = r'' = 0;$$

mais alors, d'après (16''), elles caractérisent trois surfaces. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Lorsque les pseudo-surfaces qui composent un système triple se coupent constamment deux à deux suivant leurs lignes de courbure (angulaires), ces pseudo-surfaces n'arrivent à former un système orthogonal qu'en se transformant en surfaces.*

C'est là, sous une forme nouvelle et plus générale, le célèbre théorème de Dupin.

IV. — EXTENSION DES ÉQUATIONS DE CODAZZI ET DU THÉORÈME DE GAUSS.

10. Pour étendre aux surfaces nos équations fondamentales (n° 6), il faudra d'abord remplacer dans les systèmes (10) et (14) les dérivées partielles $\frac{\partial a}{\partial s}$, $\frac{\partial a_1}{\partial s}$, ... par $\frac{1}{A} \frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{1}{A} \frac{\partial a_1}{\partial u}$, ... et tenir compte de cette substitu-

tion dans le développement des identités qui nous ont conduit à ces équations.

En supposant toujours que les faces λ, μ, ν et λ_1, μ_1, ν_1 soient variables, on aura d'abord

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial(A' p'_1)}{\partial u''} - \frac{\partial(\Lambda'' p_1)}{\partial u} \right] \sin \lambda = \Lambda' \Lambda'' (q' n'' - n' q'') = A' A'' G, \\ \left[\frac{\partial(A' q'_1)}{\partial u} - \frac{\partial(\Lambda'' q''_1)}{\partial u'} \right] \sin \mu = \Lambda' \Lambda'' (r' l'' - l' r'') = \Lambda' \Lambda'' H, \\ \left[\frac{\partial(\Lambda' r'_1)}{\partial u} - \frac{\partial(\Lambda'' r''_1)}{\partial u} \right] \sin \nu = \Lambda' \Lambda'' (p' m'' - m' p'') = \Lambda' A'' K. \end{array} \right.$$

Les combinaisons $\Lambda'' A$ et $A A'$ fourniront des résultats analogues.

Viennent ensuite les systèmes corrélatifs renfermant eux aussi, en tout, neuf équations dont voici les trois premières :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial(\Lambda' l'_1)}{\partial u''} - \frac{\partial(\Lambda'' l''_1)}{\partial u'} \right] \sin \lambda_1 = \Lambda' \Lambda'' (m_1 r'_1 - r'_1 m''_1) = \Lambda' \Lambda'' G_1, \\ \left[\frac{\partial(\Lambda' m'_1)}{\partial u} - \frac{\partial(\Lambda'' m''_1)}{\partial u'} \right] \sin \mu_1 = \Lambda' \Lambda'' (n'_1 p'_1 - p'_1 n''_1) = \Lambda' \Lambda'' H_1, \\ \left[\frac{\partial(\Lambda' n'_1)}{\partial u''} - \frac{\partial(\Lambda'' n''_1)}{\partial u'} \right] \sin \nu_1 = \Lambda' \Lambda'' (l'_1 q'_1 - q'_1 l''_1) = \Lambda' \Lambda'' K_1. \end{array} \right.$$

On en conclut, en particulier, pour tout système triple orthogonal, les trois équations différentielles suivantes, entre les fonctions arbitraires A, A', A''

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial \Lambda'}{\partial u} \frac{\partial \Lambda''}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u'} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial \Lambda''}{\partial u} \frac{\partial \Lambda'}{\partial u'} \right) + \frac{\partial}{\partial u''} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial \Lambda'}{\partial u''} \frac{\partial \Lambda''}{\partial u''} \right) = 0.$$

11. Considérons spécialement les équations du groupe (19). Parmi elles, il y en a trois, la première, la cinquième et la neuvième, c'est-à-dire celles qui correspondent directement aux conditions (F), (F'), (F'') du n° 8, auxquelles le théorème de Gauss est applicable.

Occupons-nous de la première. Puisqu'on a actuellement

$$V_1 = p_1 + \frac{1}{A'} \frac{\partial \lambda}{\partial u'},$$

les conditions (F) nous donnent

$$\begin{aligned} A' p_1 &= -\frac{\partial \lambda}{\partial u'} - \frac{1}{A'' \sin \lambda} \left(\frac{\partial A'}{\partial u''} - \frac{\partial A''}{\partial u'} \cos \lambda \right), \\ A'' p_1 &= \frac{1}{A' \sin \lambda} \left(\frac{\partial A''}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u''} \cos \lambda \right). \end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans l'équation choisie, il viendra

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A' p_1)}{\partial u''} - \frac{\partial(A'' p_1)}{\partial u'} &= -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u' \partial u''} - \frac{\partial}{\partial u''} \left(\frac{\frac{\partial A'}{\partial u''} - \frac{\partial A''}{\partial u'} \cos \lambda}{A'' \sin \lambda} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u'} \left(\frac{\frac{\partial A''}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u''} \cos \lambda}{A' \sin \lambda} \right) \\ &= \frac{A' A''}{\sin \lambda} (q' n'' - n' q'') = \frac{A' A''}{\sin \lambda} G. \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

On procédera de la même façon pour les deux autres.

12. Nous ferons remarquer, en terminant, que si l'on représente par $F(X, Y, Z) = 0$, l'équation de la surface (F) tangente au plan des yz , et rapportée à des *coordonnées rectangulaires*, on peut, à l'expression précédente de G, substituer celle-ci :

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 \right] G = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} & \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} & \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} & \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 & \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 & \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Des équations $F'(X, Y, Z) = 0$ et $F''(X, Y, Z) = 0$, on tirera des expressions analogues pour \mathcal{J}' et \mathcal{X}'' . C'est dans cette dernière spécialement que se trouvera reproduite, mais avec plus de symétrie, la seconde des formes donnée par Gauss au rapport qui lui sert à mesurer la courbure des surfaces.