# Bibliographie

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 9 (1890), p. 228-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__228_1>

## BIBLIOGRAPHIE.

Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre; par M. *G. de Longchamps*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. Paris, Ch. Delagrave et Gauthier-Villars et fils; 1890.

Le genre de Géométrie auquel Brianchon a donné le nom de *Géométrie de la règle* est d'origine assez récente. On en trouve les premiers vestiges dans un Ouvrage anonyme, publié en Pologne à la fin du XVIe siècle et dont l'auteur, resté inconnu, s'était proposé de résoudre, en se servant uniquement de jalons, certains problèmes de Géométrie pratique qui se présentent particulièrement à la guerre. C'est la lecture de cet Ouvrage intitulé *Geometria peregrinans* qui a suggéré à Schooten l'idée de consacrer un Livre de ses *Exercitationes geometricæ* à la résolution, par la ligne droite seule, de divers problèmes relatifs à des points inaccessibles ou invisibles.

La voie ouverte par le savant commentateur de Descartes a été suivie avec succès par quelques géomètres distingués, parmi lesquels il faut citer Ozanam, Lambert, Mascheroni et surtout Servois, qui a donné des solutions simples et pratiques pour les principaux problèmes géométriques qui se rapportent à l'art militaire. L'Ouvrage de Servois, publié à Metz, l'an XII, est devenu fort rare; aussi devons-nous des remerciements à M. de Longchamps qui le fait connaître au moins dans ses traits essentiels. Hâtons-nous d'ailleurs de dire que M. de Longchamps n'a pas seulement fait preuve d'érudition; s'il a résumé avec art les travaux de ses devanciers, il a aussi traité des questions nouvelles, et, qui mieux est en ces matières, il a indiqué des solutions plus simples pour un grand nombre de problèmes déjà résolus. On ne saurait trop répéter combien il importe de savoir résoudre les questions d'arpentage par des procédés différents; telle solution, parfaite en théorie, devient vaine et illusoire sur le terrain, et la diversité des solutions est rendue nécessaire par la variété des conditions où l'on peut se trouver placé dans la pratique.

Nous n'insisterons guère sur la première Partie du Livre de M. de Longchamps : c'est une introduction presque exclusivement théorique et consacrée à des principes qui seront utilisés plus tard. Toutefois, ces principes reçoivent une première application dès le début, dans les Chapitres fort intéressants qui se rapportent aux tracés des coniques, de la cissoïde, de la strophoïde, de la trisectrice, du folium de Descartes, de la serpentine, du trident de Newton, du limaçon de Pascal, de la lemniscate, des quartiques pyriformes, etc.

Pour le tracé des coniques, M. de Longchamps fait un habile emploi d'un mode de transformation qu'il a rencontré en 1882 (*Journal de Mathématiques élémentaires*) et qu'il a appelé *transformation réciproque.* J'avais moi-même, douze ans auparavant, dans une des Notes que j'ai ajoutées à la *Géométrie descriptive* d'Olivier, fait connaître le mode de transformation en question, et, après avoir démontré sa propriété fondamentale, je l'avais appliqué à la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire. Il est naturel que ces additions à un Ouvrage non classique aient été peu remarquées, mais il est naturel aussi que je profite de l'occasion pour réclamer amicalement la priorité qui m'est due. Voici ce que j'écrivais, en 1870, dans l'Ouvrage cité :

« *Deux lignes* A *et* $\alpha$ *se correspondent point par point, de telle sorte que la droite qui joint deux points correspondants* M *et* $\mu$ *passe par un point fixe* P *et soit vue sous un angle droit d'un second point fixe* O.

» *Connaissant la tangente* $\mu\theta$ *en un point quelconque* $\mu$ *de la ligne* $\alpha$, *trouver la tangente* MT *au point correspondant* M *de la ligne* A (nous laissons au lecteur le soin de faire la figure).

» Soient M′ et $\mu'$ un second couple de points homologues; on sait, par un théorème dû à Frogier, que, si deux cordes d'une conique sont vues sous un angle droit d'un point de cette conique, ces cordes se coupent sur la normale en ce point. Par suite, la conique déterminée par les cinq points M, M′, O, $\mu$, $\mu'$ a pour normale OP, c'est-à-dire est tangente en O à la droite fixe O$x$ menée par O perpendiculairement à OP. Donc, en passant à la limite, quand M′ vient en M, on voit qu'il existe une conique passant par les trois points $\mu$, M, O et touchant respectivement en ces points les droites $\mu\theta$, MT, OX.

» Mais, dans toute conique, une tangente est divisée harmoniquement par deux autres tangentes quelconques et par leur corde de contact; par suite, sur la tangente $\mu\theta$, le point de contact $\mu$ et les points $\omega$, $\rho$, $\lambda$ où cette tangente est coupée par les deux autres OX et MT et par leur corde de contact MO forment une division harmonique.

» On déterminera donc le conjugué harmonique $\rho$ de $\omega$ par rapport à $\lambda\mu$, et, en joignant le point $\rho$ au point M, on aura la tangente demandée MT. Dans le cas de l'hélicoïde de la vis à filet triangulaire, la courbe $\alpha$ est le cercle paramétrique de centre O; OM est parallèle a $\mu\theta$; donc $\lambda$ est à l'infini et $\mu$ est le milieu de $\omega\rho$, en sorte qu'il suffit de prendre, sur $\mu\theta$, $\mu\rho = \mu\omega$

et de joindre le point $\rho$ au point M. C'est la règle particulière qu'a trouvée Poncelet en appliquant habilement la méthode de Roberval. »

Mais revenons au Livre de M. de Longchamps, pour parler de la seconde Partie qui, à vrai dire, constitue le fond de l'Ouvrage. Elle se compose de douze Chapitres fort touffus, où l'on trouve, classés par ordre méthodique et résolus de façons très diverses, les problèmes principaux de la Géométrie de la règle et de l'équerre, tels que la largeur d'une rivière, les figures inaccessibles, le tir à grande distance, etc.

Le problème de la *largeur de la rivière* est à l'usage des pontonniers; Vauban lui-même en a donné une solution. Il s'agit d'apprécier rapidement, mais avec une précision suffisante, la largeur d'une rivière sur laquelle on doit jeter un pont en un point désigné. La question offre des cas particuliers très nombreux : les rives peuvent ne pas être parallèles, le passage peut s'effectuer près d'un confluent ou devant une île, et, dans ce dernier cas, il faut déterminer la largeur du bras situé de l'autre côté de l'île; enfin, la rive elle-même qui appartient au côté de la rivière sur lequel on se trouve peut ne pas être accessible immédiatement, et l'on veut cependant, pour profiter sans retard du moment favorable, préparer à l'avance tout ce qui est nécessaire pour effectuer le passage, et par conséquent connaître la largeur du cours d'eau.

On voit combien ce problème est complexe. Les questions relatives aux figures inaccessibles offrent encore plus de variété. Les deux problèmes les plus simples de ce genre sont la prolongation d'un alignement au delà d'un obstacle complètement ou partiellement accessible, et l'évaluation de la distance de deux points dont l'un est accessible.

Au premier cas se rattache le *problème du tunnel* ou de la *percée d'un bois :* un bois doit être traversé par une route rectiligne passant par deux points donnés, l'un en deçà, l'autre au delà du bois; pour gagner du temps, on veut attaquer la percée simultanément en ces deux points en traçant deux alignements formant une seule et même droite. Ou encore : deux allées qui concourent en un rond-point étant déjà pratiquées dans une forêt, on veut tracer une nouvelle allée qui, partant d'un point assigné sur la lisière, aboutisse au même rond-point.

Dans le second problème, il peut se faire que le but soit non seulement inaccessible, mais encore invisible et déterminé par deux alignements. Il peut arriver aussi, comme dans le *problème de la plate-forme,* que l'opérateur ne puisse se mouvoir que dans un espace fort restreint. Le but inaccessible peut d'ailleurs, au lieu d'être fixe, se mouvoir sur une droite donnée, etc. Enfin l'élément inaccessible, au lieu d'être un point, peut être une droite; de là de nouveaux problèmes, en quelque sorte corrélatifs des précédents.

Nous sommes resté jusqu'ici dans le cas simple d'un seul élément inaccessible ou invisible. Il peut y en avoir plusieurs, et le nombre des questions pratiques que l'on peut poser se trouve de la sorte singulièrement accru. Il faut citer en premier lieu la détermination de la *distance de deux points inaccessibles*, question rebattue, mais non épuisée; Mascheroni en a donné une vingtaine de solutions, toutes dénuées de valeur pratique, dont l'une cependant a été heureusement modifiée par Servois. M. de Longchamps en propose plusieurs autres qui méritent d'attirer l'attention. Signalons encore, dans le même ordre d'idées, la distance d'un point inaccessible à une droite inaccessible, la mesure de la grandeur d'un angle ou de l'aire d'un triangle inaccessibles, le fameux *problème de la capitale* où il s'agit de déterminer la bissectrice du saillant formé par deux lignes de fortification, enfin la question relative à la hauteur d'une tour, d'un mât, d'une montagne, d'un ballon, d'un nuage, etc.

Le tir des projectiles à grande distance et la guerre des sièges soulèvent bien des questions relatives à la Géométrie de la règle. Telles sont : l'*établissement d'un fort central* qui doit protéger également trois stations données; le *tir central* où il s'agit de placer des batteries à la même distance d'un but inaccessible; le *chemin de sûreté* où l'on propose de tracer autour d'un fort assiégé une ligne polygonale le plus rapprochée possible et telle que tous les points situés en dehors de cette ligne soient à l'abri du feu des assiégeants; l'*ouverture du feu* où l'on veut, connaissant la portée des canons d'une batterie, déterminer l'instant où les projectiles pourront atteindre un vaisseau ennemi qui s'avance vers cette batterie. Ne pouvant tout citer, nous appellerons particulièrement l'attention sur deux problèmes qui offrent un intérêt spécial, le *tir sur un but to-*

*talement ou partiellement invisible* et le *tir sur un but mobile,* questions qui sont de la plus haute importance pour l'artilleur qui ne veut pas consommer inutilement ses munitions. Signalons aussi, dans le dernier Chapitre, qui concerne des problèmes se rattachant à la Géométrie de la règle, sans en dépendre absolument, le problème du *passage* entre deux forts : connaissant la portée des pièces, on demande quel chemin on doit suivre pour passer entre les deux forts en courant le moindre risque; on admet d'ailleurs que la probabilité d'être atteint par les projectiles de l'un des forts, tant qu'on reste soumis à l'action de son tir, est proportionnelle au temps et en raison inverse de la distance.

Telle est l'analyse sommaire de ce Livre, qui s'adresse à tous ceux qui aiment la Géométrie, cette science si belle et si parfaite que les programmes tiennent aujourd'hui trop dédaigneusement à l'écart. On y reviendra sans nul doute, la fixité des idées n'étant pas la qualité dominante dans notre pays. En tout cas, toute tentative pour y ramener les esprits est de bon aloi et doit être hautement encouragée. Puisse le succès de M. de Longchamps couronner ses efforts! Chacun trouvera agrément et profit dans la lecture de son Livre : en particulier, les candidats aux Écoles spéciales ont là un charmant sujet d'étude pour les vacances. Le style est de vive allure et toutes les difficultés ont disparu sous la plume habile du savant professeur, à qui nous n'adresserons qu'un reproche : le titre de l'Ouvrage est trompeur pour vouloir être trop modeste: ce n'est pas un *essai,* c'est un coup de maître; le proclamer est pour nous un devoir, et ajoutons que c'est aussi un plaisir, l'auteur nous étant tout particulièrement sympathique.

E. R.