CH. BRISSE

Nouvelle méthode de discussion de l’équation en S

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 367-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__367_1>

NOUVELLE MÉTHODE DE DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

PAR M. CH. BRISSE.

Considérons les deux fonctions à coefficients réels

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$
$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2,$$

et cherchons pour quelles valeurs du paramètre S l'expression

$$\varphi - S\sigma \tag{1}$$

se réduit à une somme de moins de trois carrés. On sait qu'il est nécessaire et suffisant que S soit l'une des racines de l'équation du troisième degré

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

dite *équation en* S.

Propriétés de l'équation en S.

1° *L'équation en S a ses racines réelles.*

Soit, en effet, $(P+Qi)^2+(U+Vi)^2$ la somme à laquelle $\varphi - S\sigma$ est réductible, P, Q, U, V étant des fonctions linéaires à coefficients réels. En substituant dans l'identité

$$\varphi - S\sigma = (P+Qi)^2 + (U+Vi)^2$$

un système de solutions réelles des équations $Q=0$, $V=0$, autre que $x=0$, $y=0$, $z=0$, on a une équation à coefficients réels qui fournit une valeur réelle de S, puisque σ n'est pas nul.

2° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *se réduit à une somme de deux carrés distincts, est simple.*

Car elle n'annule pas la dérivée

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &-(A'-S)(A''-S)-(A''-S)(A-S)\\ &\qquad -(A-S)(A'-S)+B^2+B'^2+B''^2\end{aligned}\right.$$

du premier membre de l'équation (2).

L'identité

$$(4)\qquad \varphi - S\sigma = \varepsilon(ax+by+cz)^2+\varepsilon'(a'x+b'y+c'z)^2,$$

où ε et ε' désignent les nombres $+1$, -1, 0, donne en effet

$$\begin{aligned} A - S &= \varepsilon a^2 + \varepsilon' a'^2,\\ A' - S &= \varepsilon b^2 + \varepsilon' b'^2,\\ A'' - S &= \varepsilon c^2 + \varepsilon' c'^2,\end{aligned}$$

$$B = \varepsilon bc + \varepsilon' b'c',\qquad B' = \varepsilon ca + \varepsilon' c'a',\qquad B = \varepsilon ab + \varepsilon' ab',$$

et, en substituant ces valeurs dans l'expression (3), on trouve, d'après l'identité de Lagrange,

$$(5)\qquad -\varepsilon\varepsilon'[(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2].$$

résultat différent de zéro, puisque les fonctions

$$ax + by + cz, \qquad a'x + b'y + c'z$$

sont distinctes.

3° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *se réduit à un seul carré, est double.*

Car, ε' étant nul, l'expression (5) est nulle. Cette racine annule donc la dérivée première de $\Delta(S)$, mais elle n'annule pas la dérivée seconde

$$2(A - S) + 2(A' - S) + 2(A'' - S),$$

car elle la réduit à

$$2\varepsilon(a^2 + b^2 + c^2). \tag{6}$$

4° *Une racine de l'équation en* S, *pour laquelle l'expression* $\varphi - S\sigma$ *est identiquement nulle, est triple.*

Car, ε et ε' étant nuls, les expressions (5) et (6) sont nulles. Cette racine annule donc la dérivée première et la dérivée seconde de $\Delta(S)$.

De là résulte que réciproquement :

5° *Une racine simple de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à deux carrés distincts;*

6° *Une racine double de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à un seul carré;*

7° *Une racine triple de l'équation en* S *réduit* $\varphi - S\sigma$ *à zéro;*

et, d'après les propriétés des formes quadratiques, que :

8° *Une racine simple de l'équation en* S *n'annule pas tous les mineurs du second ordre du déterminant* $\Delta(S)$, *et réciproquement;*

9° *Une racine double de l'équation en* S *annule tous les mineurs du second ordre et n'annule pas tous ceux du premier ordre du déterminant* $\Delta(S)$, *et réciproquement ;*

10° *Une racine triple de l'équation en* S *annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant* $\Delta(S)$, *et réciproquement.*

CONSÉQUENCES.

Deux racines différentes de l'équation en S *donnent, pour* $\varphi - S\sigma$, *deux décompositions d'espèces différentes.*

Car si deux racines distinctes S et S' donnaient deux décompositions de même espèce

$$\varphi - S\,(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2,$$
$$\varphi - S'(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon P'^2 + \varepsilon' Q'^2,$$

on en déduirait

$$(S' - S)(x^2+y^2+z^2) = \varepsilon(P^2 - P'^2) + \varepsilon'(Q^2 - Q'^2).$$

Or, en substituant dans cette identité un des systèmes de solutions des équations $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on annulerait le second membre et on n'annulerait pas le premier.

Il résulte de là que, si les racines de l'équation en S sont toutes différentes, les seules formes de décomposition possibles étant $P^2 + Q^2$, $P'^2 - Q'^2$, $-P''^2 - Q''^2$, chacune des racines S, S', S'' en donne une et l'on a

$$\varphi - S\,(x^2+y^2+z^2) = P^2 + Q^2,$$
$$\varphi - S'(x^2+y^2+z^2) = P'^2 - Q'^2,$$
$$\varphi - S''(x^2+y^2+z^2) = -P''^2 - Q''^2.$$

On en déduit les identités

$$(S' - S)\sigma = P^2 + Q^2 + Q'^2 - P'^2,$$
$$(S'' - S')\sigma = P''^2 + Q''^2 + P'^2 - Q'^2,$$

et, en substituant dans la première de ces identités un des systèmes de solutions de l'équation $P' = 0$, et dans la seconde un des systèmes de solutions de l'équation $Q' = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on en conclut

$$S < S' < S'',$$

c'est-à-dire que :

La plus petite racine donne deux carrés positifs, la plus grande deux carrés négatifs, et la racine moyenne seule décompose $\varphi - S\sigma$ *et un produit de deux facteurs réels distincts.*

Si l'équation en S a une racine simple S_1 et une racine double S_2, on a deux décompositions d'espèce différente

$$\varphi - S_1(x^2 + y^2 + z^2) = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2,$$
$$\varphi - S_2(x^2 + y^2 + z^2) = -\varepsilon P'^2.$$

On en déduit

$$(S_2 - S_1)(x^2 + y^2 + z^2) = \varepsilon(P^2 + P'^2) + \varepsilon' Q^2,$$

et, en substituant un des systèmes de solutions des équations $P = 0$, $P' = 0$, ou de l'équation $Q = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on en conclut que ε, ε' et $S_2 - S_1$ ont les mêmes signes, c'est-à-dire que :

La plus petite racine, si elle est double, donne un carré positif et la plus grande deux carrés négatifs; la plus grande, si elle est double, donne un carré négatif et la plus petite deux carrés positifs.

La méthode s'applique évidemment avec la même facilité à une équation en S de degré quelconque.

Remarques.

Si l'on avait

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

ou, en décomposant en carrés,

$$\sigma = (x + y\cos\nu + z\cos\mu)^2 + \left(y\sin\nu + z\,\frac{\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu}{\sin\nu}\right)^2 + \left(z\,\frac{H}{\sin\nu}\right)^2,$$

H^2 désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

il suffirait de poser

$$x + y\cos\nu + z\cos\mu = X,$$

$$y\sin\nu + z\,\frac{\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu}{\sin\nu} = Y,$$

$$z\,\frac{H}{\sin\nu} = Z,$$

pour ramener l'expression $\varphi - S\sigma$ à la forme

$$\Phi - S(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

et pouvoir appliquer tous les résultats précédents.