Nouvelles annales de mathématiques

E. Pellegrin

Solution de la question 1591

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 373-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__373_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 1591;

PAR M. E. PELLEGRIN,
Capitaine d'Artillerie.

Soient A, B, C *les pieds des trois normales à une parabole menées par un point* P *de son plan. Par le sommet* O *de la courbe on fait passer trois cercles respectivement tangents à la parabole en* A, B, C. *Ces cercles coupent la courbe en trois autres points* A′, B′, C′. *Démontrer que les normales en* A′, B′, C′ *à la parabole sont concourantes.* (LEMAIRE.)

On sait que les bissectrices des angles formés par un couple quelconque de sécantes communes à un cercle et à une conique sont parallèles aux axes de la conique. Il suit de là que le point A′ est le symétrique, par rapport à l'axe de la parabole, du point A_1 où la parallèle menée par le sommet O à la tangente en A rencontre pour la seconde fois la courbe. D'ailleurs, la parallèle à l'axe menée par A passe par le milieu de la corde OA_1; donc l'ordonnée de A est la moitié de l'ordonnée de A_1, et, par suite, l'ordonnée de A′ est égale au double de l'ordonnée de A, changée de signe.

Mais, pour que trois normales à la parabole soient concourantes, il faut et il suffit que les ordonnées de leurs pieds aient une somme nulle. Donc, en vertu de l'hypothèse, la somme des ordonnées des points A, B, C est nulle; par suite, il en est de même de la somme des ordonnées de A′, B′, C′, puisque cette somme est égale à la précédente multipliée par — 2. Donc enfin les normales en A', B', C' concourent en un même point Q.

N. B. — MM. Audibert, Barisien, Brocard, Coronnet, Reval nous ont adressé des solutions analytiques. M. le capitaine Barisien fait observer en outre : 1° que le lieu du milieu de AA' est une parabole; 2° que l'enveloppe de AA' est une parabole; 3° que l'aire du triangle $A'B'C'$ est égale à huit fois l'aire du triangle ABC; 4° que si le point P est sur la développée de la parabole, il en est de même du point Q.