

M. D'OCAGNE

**Quelques propriétés générales des  
courbes algébriques obtenues au moyen  
des coordonnées parallèles**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1890), p. 445-455

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1890\\_3\\_9\\_\\_445\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__445_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÈBRIQUES OBTENUES AU MOYEN DES COORDONNÉES PARALLÈLES (1);**

PAR M. M. D'OCAGNE,  
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. L'équation générale des courbes algébriques est, en coordonnées parallèles,

$$(1) \quad \begin{cases} a_n v^n + (a_{n-1} u + b_{n-1}) v^{n-1} + \dots \\ + (a_0 u^n + b_0 u^{n-1} + \dots + l_0) = 0. \end{cases}$$

Si donc nous donnons à  $u$  une valeur particulière, nous avons, entre les  $n$  valeurs correspondantes de  $v$ , les relations évidentes

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} v_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} u - \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2 v_i}{du^2} = 0,$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{i=n} v_i - u \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{du} = -\frac{b_{n-1}}{a_n}.$$

L'interprétation géométrique de ces relations algé-

(1) Voir, au sujet de ces coordonnées, les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884) ou la brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars; 1885).

briques va nous donner autant de propriétés des courbes représentées par (1).

2. Rappelons d'abord que le point de contact P de la tangente  $(u, v)$  a pour équation

$$U dv - V du - (u dv - v du) = 0.$$

Il en résulte que, si cette tangente coupe l'axe  $Au$  au point M et l'axe  $Bv$  au point N, on a

$$(6) \quad \frac{dv}{du} = \frac{PN}{PM},$$

et que, si AP coupe l'axe  $Bv$  au point  $\beta$ ,

$$(7) \quad v - u \frac{dv}{du} = B\beta.$$

D'autre part, le rayon de courbure au point P est donné par

$$R = \frac{\frac{d^2 v}{du^2}}{\left(1 - \frac{dv}{du}\right)^2} \frac{\overline{NM}^3}{\delta},$$

en appelant  $\delta$  la distance AB, supposée ici perpendiculaire à  $Au$  et  $Bv$ . Or la formule (6) donne

$$1 - \frac{dv}{du} = 1 - \frac{PN}{PM} = \frac{NM}{PM}.$$

Par suite,

$$R = \frac{d^2 v}{du^2} \frac{\overline{PM}^3}{\delta}$$

et

$$(8) \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{R \delta}{\overline{PM}^3}.$$

3. Cela posé, remarquons que prendre  $u$  comme variable indépendante revient à mener à la courbe (1) les

tangentes  $MP_1, MP_2, \dots, MP_n$  par un point  $M$  variable sur  $Au$ .

Dès lors, la formule (1) exprime que, si ces tangentes rencontrent  $Bv$  en  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , la droite qui joint le point  $M$  au centre des moyennes distances des points  $N_1, N_2, \dots, N_n$  passe par un point fixe. Or cette droite est ce que nous avons appelé la *droite moyenne* (1) des droites  $MN_1, MN_2, \dots, MN_n$  relativement à la direction  $Au$ . C'est encore la polaire du point situé à l'infini dans cette direction par rapport à ce faisceau de droites, ou la conjuguée harmonique de  $Au$  par rapport à ce faisceau. Donc :

*La conjuguée harmonique de l'axe  $Au$  par rapport aux tangentes menées à une courbe algébrique quelconque par un point variable sur cet axe passe par un point fixe.*

4. Par les points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , menons à  $Au$  des parallèles qui coupent  $AB$  en  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . D'après la formule (6),

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{dv_i}{du}.$$

La formule (3) donne donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i B}{p_i A} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

ou, puisque

$$\frac{p_i B}{p_i A} = \frac{p_i A - BA}{p_i A} = 1 - \frac{\delta}{p_i A},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{p_i A} = \frac{1}{\delta} \left( n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right).$$

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, p. 114; 1884, et *Nouvelles Annales*, p. 413; 1884.

Le second membre étant constant, on voit que :

*Le conjugué harmonique du point A par rapport aux points  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , est un point fixe.*

5. Si  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  sont les points où l'axe  $Bv$  est coupé par  $AP_1, AP_2, \dots, AP_n$ , la formule (7) donne

$$v_i - u \frac{dv_i}{du} = B\beta_i.$$

La formule (5) devient donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} B\beta_i = -\frac{b_{n-1}}{a_n};$$

c'est-à-dire que :

*La conjuguée harmonique de  $Au$ , par rapport aux droites  $AP_1, AP_2, \dots, AP_n$ , est une droite fixe.*

Cette propriété généralise la précédente.

Enfin la formule (8) montre que

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{MP_i^3} = 0,$$

d'où ce théorème remarquable :

**THÉORÈME I.** — *Si l'on mène d'un point les  $n$  tangentes à une courbe algébrique de la classe  $n$ , la somme des rayons de courbure répondant aux points de contact divisés respectivement par les cubes des tangentes correspondantes est nulle.*

Le signe des divers éléments de cette somme se détermine facilement par la remarque que voici :  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  étant les centres de courbure répondant à  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , faisons tourner les triangles  $MP_i\Omega_i$ ,

$MP_2\Omega_2, \dots, MP_n\Omega_n$  autour de  $M$ , de façon à diriger  $MP_1, MP_2, \dots, MP_n$  suivant une même droite et *dans le même sens*. Un certain nombre des points  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  seront alors au-dessus de cette droite, les autres au-dessous, et l'on donnera des signes opposés, d'une part, aux quantités  $\frac{R_i}{MP_i^3}$ , correspondant aux premiers, de l'autre, aux mêmes quantités correspondant aux seconds.

Ce théorème ne nous semble avoir été remarqué jusqu'ici que dans le cas des coniques. Sa démonstration, par les coordonnées cartésiennes, dans le cas général, présenterait de sérieuses difficultés.

6. Faisant maintenant abstraction du système spécial de coordonnées, au moyen duquel nous avons obtenu les résultats précédents, nous pourrions énoncer le premier et le troisième d'entre eux sous la forme que voici, le second n'étant qu'un cas particulier du troisième :

THÉORÈME II. — *Étant donnée une courbe algébrique C, une droite D et un point A sur cette droite, si d'un point M variable sur la droite D, on mène à la courbe C les tangentes  $MP_1, MP_2, \dots, MP_n$  :*

1° *La conjuguée harmonique de la droite D, par rapport à ces tangentes, passe par un point fixe ;*

2° *La conjuguée harmonique de la droite D, par rapport aux droites qui joignent le point A aux points de contact  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , est une droite fixe.*

7. Voyons ce que deviennent ces divers théorèmes dans le cas de tangentes parallèles. Pour le théorème I, remarquons que, dans chaque élément de la somme,  $\frac{R_i}{MP_i^3}$ ,  $MP_i$  devient infini ; mais la formule (9), par la-

quelle se traduit le théorème, peut s'écrire

$$R_1 + R_2 \left( \frac{MP_1}{MP_2} \right)^3 + \dots + R_n \left( \frac{MP_1}{MP_n} \right)^3 = 0.$$

Du point M, comme centre, avec  $MP_1$  pour rayon, décrivons un cercle qui coupe  $MP_2$  en  $Q_2, \dots, MP_n$  en  $Q_n$ . La formule précédente pourra s'écrire

$$R_1 + R_2 \left( 1 + \frac{P_2 Q_2}{MP_2} \right)^3 + \dots + R_n \left( 1 + \frac{P_n Q_n}{MP_n} \right)^3 = 0.$$

Or, lorsque M s'éloigne à l'infini,  $Q_2, \dots, Q_n$  tendent respectivement vers les pieds des perpendiculaires abaissées de  $P_1$  sur les tangentes en  $P_2, P_3, \dots, P_n$ . Il en résulte que  $P_2 Q_2, P_3 Q_3, \dots, P_n Q_n$  restent finis alors que  $MP_1, MP_2, \dots, MP_n$  croissent indéfiniment. La limite de chacun des rapports  $\frac{P_i Q_i}{MP_i}$  est donc zéro, et l'on a, pour le cas des tangentes parallèles.

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i = 0.$$

On retrouve ainsi un théorème remarqué par Duhamel.

8. Pour le théorème II, rejetons la droite D à l'infini, le point A se trouvant alors dans une direction donnée; la direction de la droite D est alors arbitraire, et nous voyons que les diverses parties du théorème s'énoncent ainsi :

1° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque des tangentes à une courbe algébrique, parallèles entre elles, passe par un point fixe.*

2° *La droite moyenne, par rapport à une direction quelconque  $\Delta$ , des parallèles à une autre direction*

*quelconque  $\Delta'$  menées par les points de contact de ces tangentes, est fixe.*

La droite moyenne dont il est question dans ce dernier énoncé passe évidemment par le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles. Puisqu'elle est fixe, quelle que soit sa direction  $\Delta'$ , c'est donc que ce dernier point est fixe. On tombe ainsi sur ce théorème de Chasles :

*Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une direction donnée, est fixe quelle que soit cette direction.*

Il est tout naturel de donner à ce point fixe le nom de *point de Chasles* de la courbe algébrique considérée.

La démonstration directe de ce dernier théorème, avec la détermination analytique du point de Chasles, se fait très simplement au moyen des coordonnées parallèles : c'est ce que nous allons faire voir maintenant<sup>(1)</sup>.

9. Les tangentes à la courbe représentée par l'équation (1), parallèles à une direction donnée, s'obtiennent en adjoignant à cette équation la suivante

$$(10) \quad v - u = s,$$

où  $s$  caractérise la direction choisie. Le centre des moyennes distances de leurs  $n$  points de contact a pour

(1) Les démonstrations suivantes ont été communiquées verbalement à la *Société mathématique de France* (séance du 8 janvier 1890).



équation (1)

$$(11) \quad u \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{dv_i - du_i} - v \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{dv_i - du_i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i dv_i - v_i du_i}{dv_i - du_i} = 0.$$

Or,  $s$  ayant la même valeur pour les  $n$  points de contact, on voit, d'après (2), que

$$(11 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dv_i}{dv_i - du_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i + ds}{ds} = n + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{ds}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{dv_i - du_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{ds}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i dv_i - v_i du_i}{dv_i - du_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i ds - s du_i}{ds} \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{i=1}^{i=n} u_i - s \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{ds}. \end{array} \right.$$

Mais l'équation en  $u$  et  $s$  obtenue par l'élimination de  $v$  entre (1) et (10) est de la forme

$$(12) \quad A_n u^n + (A_{n-1} s + B_{n-1}) u^{n-1} + \dots = 0.$$

Par suite,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=n} u_i = -\frac{A_{n-1}}{A_n} s - \frac{B_{n-1}}{A_n}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{ds} = -\frac{A_{n-1}}{A_n}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} u_i - s \sum_{i=1}^{i=n} \frac{du_i}{ds} = -\frac{B_{n-1}}{A_n}. \end{array} \right.$$

---

(1) *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 86, note II.



Dès lors, l'équation (14) du point de Chasles devient

$$(19) \quad u\varphi'_{n_u}(t,1) + v\varphi'_{n_v}(t,1) + \varphi_{n-1}(t,1) = 0.$$

Elle est, sous cette forme, d'une remarquable simplicité et peut être étendue à l'espace.

11. Nous donnerons, pour terminer, la démonstration directe du théorème de Chasles en coordonnées axiales.

Nous avons remarqué (1) que, dans ce système de coordonnées, l'équation la plus générale d'une courbe algébrique (supposée de la classe  $n$ ) est

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda^n a_n \tan^n \theta \\ + \lambda^{n-1} (a_{n-1} \tan^n \theta - b_{n-1} \tan^{n-1} \theta) + \dots = 0. \end{cases}$$

De plus, si l'on prend l'axe du système pour axe  $Ox$ , l'axe  $Oy$  étant la perpendiculaire menée à celui-ci par l'origine, les coordonnées  $x_i, y_i$  du point de contact de la tangente  $(\lambda_i, \theta)$  sont données par (2),

$$x_i = \sin^2 \theta \frac{d\lambda_i}{d\theta}, \quad y_i = \lambda_i + \sin \theta \cos \theta \frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

Par suite, les coordonnées  $x$  et  $y$  du centre des moyennes distances des points de contact des  $n$  tangentes parallèles à la direction  $\theta$  sont données par

$$(21) \quad nx = \sin^2 \theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta}, \quad ny = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i + \sin \theta \cos \theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta}.$$

(1) *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 89.

(2) *Ibid.*, p. 41.

( 455 )

Or l'équation (20) donne

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_n} \cot \theta,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i + \sin \theta \cos \theta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\lambda_i}{d\theta} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Les formules (21) deviennent donc

$$(22) \quad nx = \frac{b_{n-1}}{a_n}, \quad ny = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

et, comme ces coordonnées sont constantes, le théorème est démontré.