

L. MALEYX

**Méthode élémentaire pour étudier les  
variations des fonctions continues.  
Maximums et minimums**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1890), p. 502-508

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1890\\_3\\_9\\_\\_502\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__502_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

**MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR ÉTUDIER LES VARIATIONS  
DES FONCTIONS CONTINUES. MAXIMUMS ET MINIMUMS;**

PAR M. L. MALEYX.

---

1. Soit  $F(x)$  une fonction continue de  $x$  : attribuant à la variable une valeur quelconque  $x_1$ , la différence  $F(x) - F(x_1)$  devient nulle quand on y fait  $x = x_1$  et, généralement, change de signe quand  $x$  passe, d'une manière continue, d'une valeur un peu inférieure à  $x_1$  à une valeur un peu supérieure.

Si  $F(x)$  est une fonction algébrique entière, on peut mettre  $x - x_1$  en facteur dans la différence  $F(x) - F(x_1)$ , puisqu'elle est divisible par  $x - x_1$  et puisque, aussi, on connaît la forme du quotient.

On le peut encore, d'après le même principe, si  $F(x)$  est rationnelle, mais fractionnaire. Soit, en effet,  $F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ; on a

$$F(x) - F(x_1) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)} = \frac{\varphi(x)\psi(x_1) - \varphi(x_1)\psi(x)}{\psi(x)\psi(x_1)},$$

et le numérateur contient en facteur  $x - x_1$  qu'on peut mettre en évidence.

Si  $F(x)$  est irrationnelle, ou même parfois compliquée d'expressions trigonométriques, on peut, sans sortir des procédés du calcul algébrique élémentaire, mettre en évidence le facteur  $x - x_1$  dans la différence  $F(x) - F(x_1)$ .

Supposons qu'il en soit ainsi, et que nous ayons pu mettre  $F(x) - F(x_1)$  sous la forme

$$(x - x_1) \times F_1(x, x_1).$$

Désignons par  $F_1(x_1, x_1)$  ce que devient  $F_1(x, x_1)$  quand on y remplace  $x$  par  $x_1$ , nous pouvons poser

$$F_1(x, x_1) = F_1(x_1, x_1) + \varepsilon,$$

$\varepsilon$  tendant vers zéro quand  $x$  tend vers  $x_1$ , et nous aurons

$$F(x) - F(x_1) = (x - x_1) [F_1(x_1, x_1) + \varepsilon].$$

Si  $F_1(x_1, x_1)$  est un nombre différent de zéro, quand  $x$  sera très voisin de  $x_1$ , que du reste il lui soit inférieur ou supérieur,  $\varepsilon$  sera très petit et numériquement inférieur à  $F_1(x_1, x_1)$ ; dès lors, ce sera ce terme  $F_1(x_1, x_1)$  qui donnera son signe à la parenthèse, et la différence  $F(x) - F(x_1)$  sera du signe de  $x - x_1$  ou du signe contraire, suivant que  $F_1(x_1, x_1)$  sera positif ou négatif.

Il résulte de là que, si  $F_1(x_1, x_1)$  est positif quand  $x$  passera d'une valeur un peu inférieure à  $x_1$  à une valeur un peu supérieure, la différence  $F(x) - F(x_1)$  passera d'une valeur négative à une valeur positive, et qu'en conséquence  $F(x)$  croîtra avec  $x$ ; qu'au con-

traire, si  $F_1(x_1, x_1)$  est négatif,  $F(x)$  décroîtra dans les mêmes conditions.

Si, actuellement, nous faisons varier  $x_1$  en le faisant croître d'une manière continue, tant que  $F_1(x_1, x_1)$  restera positif,  $F(x)$  croîtra, et, tant que  $F_1(x_1, x_1)$  restera négatif,  $F(x)$  décroîtra.

Dès lors,  $F(x)$  passera par un maximum ou un minimum quand  $F_1(x_1, x_1)$  passera du positif au négatif, car alors  $F(x)$  cessera de croître pour décroître, ou du négatif au positif, car alors  $F(x)$  cessera de décroître pour croître; et l'on voit de plus que  $F(x)$  ne peut passer par un maximum ou un minimum que dans ces conditions.

On n'aura donc, pour trouver les maximums ou minimums de la fonction  $F(x)$ , qu'à chercher les valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction  $F_1(x, x)$  change de signe, et l'on pourra distinguer les maximums des minimums par l'ordre des signes que prend  $F_1(x, x)$  quand  $x$  passe d'une valeur un peu inférieure à une valeur un peu supérieure à celle pour laquelle ce changement se produit.

2. Prenons, comme premier exemple, la recherche des maximums ou minimums de la fonction

$$F(x) = (x - a)^\alpha \times (x - b)^\beta \times (x - c)^\gamma.$$

Supposons  $\alpha, \beta, \gamma$  entiers et positifs, et  $a < b < c$ .  
Nous avons, identiquement,

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_1) = & (x - a)^\alpha \times (x - b)^\beta \times [(x - c)^\gamma - (x_1 - c)^\gamma] \\ & + (x - a)^\alpha \times (x_1 - c)^\gamma \times [(x - b)^\beta - (x_1 - b)^\beta] \\ & + (x_1 - b)^\beta \times (x_1 - c)^\gamma \times [(x - a)^\alpha - (x_1 - a)^\alpha]. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 F(x) - F(x_1) \equiv & (x-a)^\alpha \times (x-b)^\beta \\
 & \times [(x-c)^{\gamma-1} + (x-c)^{\gamma-2}(x_1-c) + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + (x_1-c)^{\gamma-1}] \times (x-x_1) \\
 & + (x-a)^\alpha \times (x_1-c)^\gamma \\
 & \times [(x-b)^{\beta-1} + (x-b)^{\beta-2}(x_1-b) + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + (x_1-b)^{\beta-1}] \times (x-x_1) \\
 & + (x_1-c)^\beta \times (x_1-c)^\gamma \\
 & \times [(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-2}(x_1-a) + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + (x_1-a)^{\alpha-1}] \times (x-x_1).
 \end{aligned}$$

On en déduit, conformément à la notation du numéro précédent,

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, x_1) = & (x_1-a)^{\alpha-1} \times (x_1-b)^{\beta-1} \times (x_1-c)^{\gamma-1} \\
 & \times [\gamma(x_1-a)(x_1-b) + \beta(x_1-a)(x_1-c) + \alpha(x_1-b)(x_1-c)].
 \end{aligned}$$

Le quatrième facteur de  $F_1(x_1, x_1)$  est un trinôme du second degré, décomposable en deux facteurs réels du premier, car il prend alternativement les signes +, —, +, quand on y remplace  $x_1$  par  $a, b, c$ ; désignons par  $x'$  et  $x''$  les valeurs de  $x_1$  pour lesquelles il devient nul, et qui satisfont aux inégalités

$$a < x' < b < x'' < c.$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 F_1(x, x) = & (\alpha + \beta + \gamma)(x-a)^{\alpha-1}(x-x') \\
 & \times (x-b)^{\beta-1}(x-x'')(x-c)^{\gamma-1}.
 \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit immédiatement quelles sont toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $F(x, x)$  change de signe, et l'on a ainsi une solution du problème qui nous paraît plus simple que celle qu'on obtient par la méthode, dite *des multiplicateurs*, et qui en tout cas est plus complète.

*Remarque.* — On trouve aussi d'une manière ana-

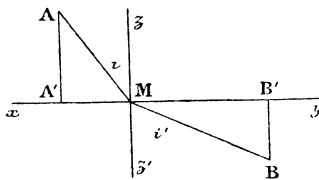
logue, et encore plus simple, la solution complète du maximum et du minimum de la fonction entière du troisième degré, décomposée ou non en facteurs du premier degré; nous ne nous y arrêterons pas, laissant aux élèves le soin de la traiter.

3. Comme deuxième et dernier exemple, considérons le suivant :

Deux points A et B sont placés de part et d'autre d'une droite XY située avec eux dans un même plan; un point mobile doit passer de A en B, il se meut d'un mouvement uniforme et rectiligne dont la vitesse est V dans la région du point A, et d'un mouvement uniforme et rectiligne dont la vitesse est V' dans la région du point B : on demande la propriété caractéristique du point M, où il doit traverser XY, pour que le trajet s'effectue dans le moindre temps possible.

Soient A' et B' (fig. 1) les projections orthogonales de A et B sur XY,  $d$  la distance A'B',  $a$  et  $b$  les distances

Fig. 1.



AA' et BB'; soit M le point de passage. Posons  $A'M = x$ ,  $B'M = y$ ,  $AM = l$ ,  $BM = \lambda$ ;  $y$ ,  $l$  et  $\lambda$  sont des fonctions continues de  $x$  faciles à déterminer; nous désignerons ce que deviennent  $y$ ,  $l$  et  $\lambda$  par  $y_1$ ,  $l_1$  et  $\lambda_1$ , quand on y remplace  $x$  par  $x_1$ .

D'après ces notations, le temps du trajet est repré-

senté par

$$F(x) = \frac{l}{V} + \frac{\lambda}{V'},$$

et l'on a

$$F(x) - F(x_1) = \frac{l - l_1}{V} + \frac{\lambda - \lambda_1}{V'}$$

ou

$$F(x) - F(x_1) = \frac{l^2 - l_1^2}{V(l + l_1)} + \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{V'(\lambda + \lambda_1)},$$

ou encore

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_1) &= \frac{x^2 - x_1^2}{V(l + l_1)} + \frac{y^2 - y_1^2}{V'(\lambda + \lambda_1)} \\ &= \frac{(x - x_1)(x + x_1)}{V(l + l_1)} + \frac{(y - y_1)(y + y_1)}{V'(\lambda + \lambda_1)}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$x + y = x_1 + y_1 = d$$

et, en conséquence,

$$y - y_1 = -(x - x_1);$$

d'où

$$F(x) - F(x_1) = (x - x_1) \left[ \frac{x + x_1}{V(l + l_1)} - \frac{y + y_1}{V'(\lambda + \lambda_1)} \right].$$

D'après nos notations,

$$F_1(x, x_1) = \frac{x + x_1}{V(l + l_1)} - \frac{y + y_1}{V'(\lambda + \lambda_1)},$$

et

$$F_1(x, x) = \frac{x}{Vl} - \frac{y}{V'\lambda}$$

ou, en conséquence de relations géométriques évidentes,

$$F_1(x, x) = \frac{1}{V\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}} - \frac{1}{V'\sqrt{1 + \frac{b^2}{y^2}}}.$$

Quand  $x$  varie de zéro à  $d$  d'une manière continue, le premier terme de  $F(x, x)$ , qui est additif, croît de zéro à  $\frac{1}{V\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}}}$ , tandis que le deuxième, qui est soustrac-

tif, croît de  $\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{d^2}}}$  à zéro; de là résulte que

$f(x, x)$  croît de  $\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{d^2}}}$  à  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}}}$ , et devient

nul une et une seule fois, dans l'intervalle, en passant du négatif au positif: c'est pour cette valeur de  $x$  que le temps du trajet est minimum.

Ce minimum a lieu quand

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{\lambda},$$

ou, observant que  $\frac{x}{l}$  et  $\frac{y}{\lambda}$  sont les sinus des angles  $i$  et  $i'$  formés par les trajets  $l$  et  $\lambda$  avec la normale à  $XY$  en  $M$ , le minimum a lieu quand

$$\frac{\sin i}{\sqrt{v}} = \frac{\sin i'}{\sqrt{v'}}.$$