

AURIC

Formule de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 561-564

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__561_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE WARING;

PAR M. AURIC,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort.

La formule de Waring exprime une fonction symétrique de la forme

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

en fonction des sommes des puissances semblables des éléments constituants, ces puissances étant elles-mêmes des sommes exclusives des exposants primitifs

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

des nombres entiers positifs ou nuls, tels que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n.$$

Partageons les n exposants en

λ_1 groupes de 1 exposant,
 λ_2 groupes de 2 exposants,
.....
 λ_n groupes de n exposants.

Posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \nu$$

et soient

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$$

les sommes des exposants dans chaque groupe.
Considérons le produit

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\nu$$

et faisons toutes les permutations des exposants entre eux qui font acquérir à ce produit une valeur distincte, additionnons-les toutes et soit

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

la fonction des s , ainsi obtenue, qui est évidemment symétrique par rapport aux exposants.

Nous écrirons

$$(1) \quad \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum \mu T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

μ étant un coefficient fonction de

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

qu'il s'agit de déterminer. Nous nous appuierons sur la formule évidente, identique,

$$\begin{aligned} \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} &= s_{\alpha_n} \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i + \alpha_n} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

En adoptant la formule de représentation (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \mu T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= s_{\alpha_n} \sum \mu' T(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum \mu' T^i(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

ceci est une identité; il n'y a aucune réduction possible dans le second membre, car le premier terme renferme toujours s_{α_n} et le deuxième toujours $s_{\alpha_i + \alpha_n}$; donc un terme quelconque dans le second membre doit trouver son égal dans le premier, et réciproquement.

Il faut toutefois remarquer que si, dans la fonction symétrique

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

développée suivant (1), on considère un groupe de j exposants (il s'en trouve λ'_j), quand on changera chacun de ces j exposants en

$$\alpha_i + \alpha_n, \quad \alpha_{i+1} + \alpha_n, \quad \dots, \quad \alpha_{i+j-1} + \alpha_n,$$

on aura toujours le même résultat, c'est-à-dire qu'il sera répété j fois.

D'ailleurs pour égaliser terme à terme dans (2), il faut évidemment prendre pour les valeurs de

$$\lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \lambda'_3, \quad \dots, \quad \lambda'_{n-1},$$

soit

$$\lambda_{1-1}, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le premier terme; soit

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \dots, \quad \lambda_{i+1}, \quad \lambda_{i+1}-1, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le deuxième terme.

Nous avons alors

$$(3) \quad \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) = \mu(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \\ = -i \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1}-1, \dots, \lambda_{n-1}). \end{cases}$$

C'est de ces deux formules fondamentales que nous allons déduire la forme de μ . Suivons les transformations

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= (-i) \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i+1} + 1, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}), \\ &= (-i) [- (i-1)] \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1} + 1, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i11}) \mu(\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i11})^{\lambda_{i+1}} \mu(\lambda_1 + \lambda_{i+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{111})^{\lambda_2} (-1^{211})^{\lambda_3} \dots (-1^{n-111})^{\lambda_n} \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, 0, 0, \dots, 0) \quad (\dagger). \end{aligned}$$

(1) Nous adoptons la notation connue

$$a(a+r)(a+2r) \dots [a+(n-1)r] = a^{n!r}.$$

Mais

$$\mu(\lambda, 0, 0, 0, \dots, 0) = \mu(\lambda - 1, 0, 0, \dots, 0) = \mu(1, 0, 0, \dots, 0) = 1;$$

donc

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (-1)^{\lambda_1} (-1)^{2\lambda_2} (-1)^{3\lambda_3} \dots (-1)^{(n-1)\lambda_n}.$$

On met généralement ce résultat sous une autre forme. Le signe de μ est celui de

$$(-1)^{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + (n-1)\lambda_n},$$

mais

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \dots + n\lambda_n = x,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_n = y$$

c'est donc le signe de

$$(-1)^{n-y}.$$

D'ailleurs, en groupant les facteurs, on a

$$\mu = (-1)^{n-y} (2)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} (3)^{\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n} \dots \\ \cdot (n-2)^{\lambda_{n-1} + \lambda_n} (n-1)^{\lambda_n}.$$

C'est d'ailleurs la forme à laquelle on arriverait en généralisant la formule fondamentale qui nous a servi de point de départ.