

E. CARVALLO

Contact de deux quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 586-594

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__586_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONTACT DE DEUX QUADRIQUES;

PAR M. E. CARVALLO,

Examineur d'admission à l'École Polytechnique (1).

I. — CONDITIONS DE SIMPLE CONTACT.

Je considère deux quadriques dont les équations homogènes sont

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = f(x, y, z, t) \\ = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cxt + 2C'y't + 2C''zt + Dt^2, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \varphi(x, y, z, t) \\ = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\beta yz + 2\beta'zx + 2\beta''xy \\ + 2\gamma xt + 2\gamma'y't + 2\gamma''zt + \delta t^2. \end{cases}$$

Pour qu'elles soient tangentes au point (x, y, z, t) , il faut et il suffit que ce point appartienne aux deux surfaces et qu'en ce point les plans tangents coïncident, c'est-à-dire que les variables x, y, z, t satisfassent aux équations (1), (2) et aux équations

$$(3) \quad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z} = \frac{f'_t}{\varphi'_t} = -\lambda.$$

Je puis supprimer l'équation (1) qui est une conséquence des équations (2) et (3) et chasser les dénominateurs des équations (3). Ainsi, pour que les quadriques soient tangentes en un point, il faut et il suffit que, pour une valeur convenable de λ , les coordonnées de ce point sa-

(1) La méthode suivie est inspirée par la très intéressante discussion de l'intersection des coniques par M. Darboux.

tisfissent aux équations

$$(2) \quad \varphi(x, y, z, t) = 0.$$

$$(3) \quad \begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ f'_z + \lambda \varphi'_z = 0, \\ f'_t + \lambda \varphi'_t = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) sont linéaires homogènes en x, y, z, t . Pour qu'elles admettent une solution unique pour les rapports de ces variables, il faut que λ soit racine de l'équation

$$(4) \quad 0 = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \alpha\lambda & B' + \beta'\lambda & B' + B'\lambda & C + \gamma\lambda \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0,$$

et que les déterminants mineurs de Δ ne soient pas tous nuls. Dès lors, des équations (3) on tire pour x, y, z, t des valeurs proportionnelles à ces déterminants mineurs, savoir

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{b'} = \frac{t}{c}, \\ \frac{x}{b''} = \frac{y}{a'} = \frac{z}{b} = \frac{t}{c'}, \\ \frac{x}{b'} = \frac{y}{b} = \frac{z}{a''} = \frac{t}{c''}, \\ \frac{x}{c} = \frac{y}{c'} = \frac{z}{c''} = \frac{t}{d}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en multipliant les quatre lignes respectivement par x, y, z, t ,

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{a'} = \frac{z^2}{a''} = \frac{yz}{b} = \frac{zx}{b'} = \frac{xy}{b''} = \frac{xt}{c} = \frac{yt}{c'} = \frac{zt}{c''} = \frac{t^2}{d}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = \alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + 2\beta b + 2\beta' b' + 2\beta'' b'' \\ \quad \quad \quad + 2\gamma c + 2\gamma' c' + 2\gamma'' c'' + \delta d = \frac{d\Delta}{d\lambda}. \end{cases}$$

Ainsi, pour que les deux quadriques soient tangentes, il faut que l'équation (4) ait une racine double; on portera cette racine dans les équations (3), d'où l'on tirera les coordonnées du point de contact.

Interprétation géométrique. — Les équations (3) déterminent le sommet du cône dont l'équation est

$$(7) \quad f + \lambda\varphi = 0,$$

et qui par suite passe par l'intersection des quadriques f et φ . Il y a quatre solutions fournies par l'équation (4). Le point de contact est forcément l'un de ces sommets; mais, à cause de l'équation (5), il faut de plus que ce sommet soit celui de deux cônes confondus. Comme le système (3), (5) est équivalent au système (3), (2), il revient au même de dire que ce sommet est sur la surface φ ; il est dès lors sur la surface f et, par suite, sur l'intersection des deux quadriques.

Ces résultats sont assez évidents *a priori* : en effet, le point de contact est un point double de l'intersection; si l'on prend ce point pour sommet d'un cône ayant pour directrice l'intersection, ce cône sera du second degré.

Ces considérations géométriques ont l'avantage de rendre intuitifs certains résultats de la discussion suivante.

II. — CONDITIONS DE DOUBLE CONTACT.

Les équations (2) et (3) doivent admettre deux solutions pour les rapports des variables x, y, z, t . Deux cas peuvent se présenter, suivant que ces solutions répondent à deux valeurs différentes ou à la même valeur de λ .

Premier cas. — Soient S et S_1 les sommets des deux cônes répondant aux racines doubles λ et λ_1 de l'équa-

tion $\Delta(\lambda) = 0$. Je dis que SS_1 est une *génératrice commune aux deux surfaces f et φ* . En effet, S_1 est sur les surfaces f et φ et par suite sur le cône S ; SS_1 est donc une génératrice de ce cône; c'est de même une génératrice du cône S_1 . Ainsi, un point quelconque de cette génératrice satisfait aux équations des deux cônes

$$f + \lambda\varphi = 0, \quad f + \lambda_1\varphi = 0,$$

et par suite aux équations des deux quadriques

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

La droite SS_1 est donc une *génératrice commune aux deux quadriques f et φ* . C. Q. F. D.

Deuxième cas. — Les deux solutions communes à (2) et (3) répondent à la même valeur de λ . Je dis que *les deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes*. En effet, comme les équations (3) sont du premier degré et admettent plus d'une solution, il faut que les déterminants mineurs de Δ soient nuls, c'est-à-dire que le cône $f + \lambda\varphi = 0$ se réduise à un système de deux plans PQ . En d'autres termes, les deux quadriques f et φ se coupent suivant deux courbes planes. C. Q. F. D.

Remarquons que les points où la droite d'intersection (P, Q) des deux plans coupe la quadrique φ donneront les solutions du système (2), (3).

Il est clair que, dans le cas actuel, cette droite (P, Q) ne saurait être sur la surface φ , car les équations (2) et (3) auraient une infinité de solutions [tous les points de la droite (P, Q)]. Les deux plans ne peuvent pas non plus se réduire à un plan double P^2 , car les équations (2), (3) auraient une infinité de solutions (tous les points communs à P et à φ). Il y aurait une infinité de points de contact, et non pas deux.

III. — CONDITIONS DE TRIPLE CONTACT.

On ne peut pas supposer que les trois points de contact répondent à trois valeurs différentes de λ , car l'équation (4), qui est du quatrième degré, ne saurait avoir trois racines doubles. On ne peut pas non plus supposer que les trois points de contact répondent à une même valeur de λ ; car, d'après une remarque précédente, il ne peut pas y en avoir plus de deux sans qu'il y en ait une infinité. La seule hypothèse possible est celle-ci : deux points S et S' répondent à une valeur de λ , et le troisième sommet S_1 répond à une autre valeur λ_1 . Alors, d'après ce qui précède, on a

$$f + \lambda\varphi = P.Q.$$

Les deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes; de plus S_1S et S_1S' sont deux génératrices communes aux deux surfaces. *L'intersection se compose de ce couple de génératrices et d'une deuxième courbe plane passant par S et S' .*

IV. — CONDITIONS DE QUADRUPLE CONTACT.

La seule hypothèse possible est celle-ci : deux points S et S' répondent à une valeur λ et les deux autres S_1 et S'_1 à une autre valeur λ_1 . On voit, comme à l'article III, que les deux quadriques ont quatre génératrices communes SS_1 , SS'_1 et $S'S_1$, $S'S'_1$, formant deux couples de plans

$$\left. \begin{array}{l} SS_1S' \\ SS'_1S' \end{array} \right\} \text{ se coupant suivant } SS', \text{ et répondant à } \lambda,$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1SS'_1 \\ S_1S'S'_1 \end{array} \right\} \text{ se coupant suivant } S_1S'_1, \text{ et répondant à } \lambda_1.$$

V. — CONTACTS EN NOMBRE SUPÉRIEUR A QUATRE.

Il ne peut pas y avoir plus de quatre points de contact sans qu'il y en ait une infinité : car il ne peut pas y avoir plus de deux contacts répondant à la racine double λ sans qu'il y en ait une infinité, et l'équation (4) ne peut pas admettre plus de deux racines doubles à moins d'être une identité. D'après ce qui précède, il peut y avoir une infinité de points de contact de trois manières différentes :

1° Un des cônes passant par l'intersection des deux quadriques est un plan double;

2° Il se réduit à un système de deux plans dont l'intersection est commune aux deux quadriques;

3° L'équation en λ est une identité.

Nous allons examiner successivement ces trois cas.

Premier cas. — La quadrique φ étant donnée, la quadrique f qui la coupe suivant la section par le plan double P^2 et toutes celles qui passent par leur intersection sont comprises dans la formule

$$\varphi + \lambda P^2 = 0.$$

On pourra choisir les variables coordonnées de façon que l'on ait $P = x$. Les équations (3) s'écrivent alors

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi'_x + \lambda x = 0, \\ \frac{1}{2} \varphi'_y = 0, \\ \frac{1}{2} \varphi'_z = 0, \\ \frac{1}{2} \varphi'_t = 0. \end{cases}$$

D'après cela, si je désigne par δ le discriminant de la fonction φ , l'équation (4) devient

$$(4') \quad \delta + \lambda \frac{d\delta}{dx} = 0.$$

Cette équation en λ a une racine simple finie à laquelle répond le cône qui a pour sommet le pôle du plan $x = 0$, et une racine triple infinie à laquelle répond le plan double $x^2 = 0$.

Deuxième cas. — L'arête du dièdre formé par le couple de plans PQ passant par l'intersection de f et φ est supposée sur la quadrique φ . L'équation de celle-ci est donc de la forme

$$0 = \varphi = PQ + PR + QS.$$

Toutes les quadriques passant par l'intersection de φ et de PQ sont comprises dans la formule

$$\lambda PQ + PR + QS = 0.$$

Si les formes linéaires P, Q, R, S ne sont pas indépendantes, toutes les quadriques représentées par cette équation sont des cônes de même sommet. J'exclus ce cas qui rentre dans l'étude des coniques. Je pose alors

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = z, \quad S = t.$$

L'équation générale des quadriques considérées

$$\lambda xy + xz + yt = 0$$

donne pour l'équation en λ

$$(4'') \quad 0 = \Delta = 1.$$

Cette équation a une racine quadruple infinie à laquelle répond, pour le cône, le couple de plans $xy = 0$. Les quadriques sont tangentes le long de la génératrice

$$x = 0, \quad y = 0,$$

qui est par suite une génératrice double; elles ont de

plus en commun les deux génératrices

$$\begin{cases} x = 0, \\ t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ces génératrices forment donc l'intersection complète.

Troisième cas. — Le premier membre de l'équation (4) en λ est identiquement nul. Alors les deux quadriques f et φ sont des cônes, car le premier et le dernier coefficient de l'équation sont les discriminants des deux formes f et φ . J'exclus, comme plus haut, le cas où ces deux cônes ont le même sommet.

D'après l'hypothèse, à tout nombre λ répond un cône dont l'équation est

$$(\tau') \quad f + \lambda\varphi = 0.$$

Si on substitue les coordonnées de son sommet dans φ , on obtient, comme on a vu, $\frac{d\Delta}{d\lambda}$. Cette quantité est nulle, puisque Δ est identiquement nul. Ainsi le sommet de tout cône (τ') est sur la quadrique φ , en particulier le sommet S du cône f ; de même, le sommet σ du cône φ et sur f . Donc $S\sigma$ est une génératrice commune aux deux cônes f et φ . Je considère maintenant le sommet T de l'un quelconque des cônes (τ') . TS est une génératrice commune à ce cône T et au cône φ . TS appartient donc aussi à φ . De même $T\sigma$ est commune à f et à φ . Si donc T est extérieur à $S\sigma$, les cônes f et φ contiennent trois génératrices formant un triangle $TS\sigma$; ils ont dès lors un plan commun $TS\sigma$ et se décomposent.

Ainsi, pour qu'on ait affaire à des cônes proprement dits, il faut que T soit sur $S\sigma$; et comme, par hypothèse, il y a une infinité de points T , il existe sur la droite $S\sigma$, et en dehors des points S et σ , des points où les deux

(594)

cônes sont tangents. Ils sont alors tangents tout le long de la génératrice $S\sigma$; celle-ci est une génératrice double. Les deux cônes se coupent suivant cette génératrice double et suivant une conique.