ERNEST DUPORCQ

Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 594-595

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__594_1>

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève de l'École Monge.

En supprimant, dans chacune des $(n+1)^{\text{iemes}}$ premières lignes du triangle de Pascal, le chiffre qui la termine, puis en la complétant par des o, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & C_n^2 & \ldots & n & 0 \\ 1 & n+1 & \ldots & \ldots & C_{n+1}^{n-1} & \overline{n+1} \end{vmatrix},$$

dont la valeur est évidemment $\overline{n+1}\,!$.

Si l'on y remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des éléments de la rangée correspondante, multipliés, le premier par 1, le deuxième par x, le troisième par x^2, ..., le p^{ieme} par x^{p-1}, ..., enfin le dernier par x^n, on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 1+2x \\ . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & . & \ldots & n & 1+nx+\ldots+nx^{n-1} \\ 1 & \overline{n+1} & . & \ldots & C_{n+1}^2 & 1+\overline{n+1}\,x+\ldots+\overline{n+1}\,x^n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est $\overline{n+1}!\,x^n$. On peut donc écrire l'identité

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & \overline{x+1}^2 \\ . & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & . & \dots & n & \overline{x+1}^n \\ 1 & \overline{n+1} & . & \dots & C_{n+1}^2 & \overline{x+1}^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & . & x^2 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n & x^n \\ 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^2 & x^{n+1} \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!} = x^n.$$

En désignant par $f(x)$ le second terme du premier membre, on a donc successivement

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= x^n, \\ f(x)-f(x-1) &= (x-1)^n, \\ \dots\dots&\dots\dots\dots \\ f(2)-f(1) &= 1^n. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$f(1)=0.$$

On a, par suite,

$$f(x+1)=1^n+2^n+\dots+x^n.$$

Ainsi la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissanees des x premiers nombres est donnée par l'expression $f(x+1)$, qu'il est plus avantageux d'écrire

$$x^n+(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ x^n & 1 & n & \dots & n \\ x^{n+1} & 1 & n+1 & \dots & C_{n+1}^2 \end{vmatrix}}{\overline{n+1}!}.$$