L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 596-613

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__596_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

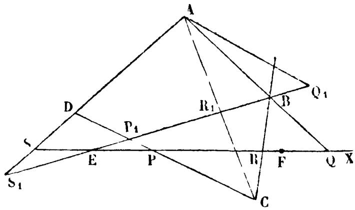
PAR M. L. MALEYX.

Construction d'une conique dont on donne cinq points.

XII. *On donne cinq points, appartenant à une même conique, et l'on se propose d'en construire autant qu'on voudra, ainsi que les tangentes en ces points. On se propose encore de construire le centre de la courbe si elle en a un, de déterminer son genre, deux diamètres conjugués faisant un angle donné, les axes, les sommets, les asymptotes; de lui mener deux tangentes par un point donné de son plan.*

Soient A, B, C, D, E cinq points donnés appartenant à une même conique et supposés à distance finie (*fig.* 30); considérons le quadrilatère inscrit ABCD, et

Fig. 30.



par le point E menons une droite EX dans une direction quelconque; d'après le théorème de Desargues, son second point commun avec la conique sera le point F conjugué de E, dans l'involution déterminée par les deux couples de points P et Q, R et S, où la sécante ren-

(1) Voir même Tome, p. 481.

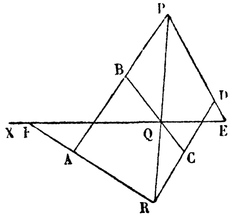
contre les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, à savoir DC et AB, BC et AD; on le construira en faisant passer deux cercles, le premier par les points P et Q, le second par les points R et S, et enfin un troisième cercle passant par E et ayant avec les précédents même axe radical; le troisième cercle passera par le point F qu'il déterminera.

Si nous voulons actuellement construire la tangente en un de ces points, soit A, nous pouvons considérer le triangle ADC et la tangente en A comme constituant un quadrilatère inscrit dont les côtés opposés sont AD et AC, DC et la tangente AQ_1 en A. Traçons la droite indéfinie EB, qui rencontre la courbe en E et B : elle rencontrera la tangente en A au point Q_1 conjugué de P_1, dans l'involution déterminée par les points E et B, où elle coupe la courbe, et les points R_1 et S_1, où elle coupe les deux autres côtés opposés du quadrilatère (THÉORÈME DE DESARGUES); on pourra donc construire le point Q_1 et, en conséquence, la tangente AQ_1 en A.

Les mêmes questions peuvent être résolues au moyen du THÉORÈME DE PASCAL.

Soient, en effet, A, B, C, D, E cinq points appartenant à une conique (*fig.* 31) : unissons-les successive-

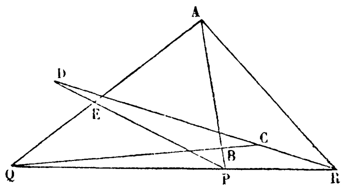
Fig. 31.



ment par des lignes droites, et menons, par le point E, la droite EX indéfinie dont nous voulons trouver le second point commun F avec la courbe. ABCDEF est un hexagone inscrit dans la conique, les points P et Q où se coupent les couples de côtés opposés AB et DE, BC et EFX, appartiennent à la droite de Pascal et la déterminent; le point R, où elle est rencontrée par DC, appartient aussi au côté FA; donc, si l'on unit RA, cette droite va rencontrer EX au point F cherché.

Supposons actuellement qu'on veuille construire la tangente en un des points donnés, A (*fig.* 32); considérons la figure ABCDE jointe à la tangente en A comme

Fig. 32.



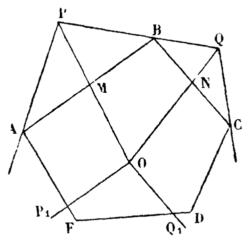
un hexagone inscrit, DC étant opposé à la tangente en A. Les points P et Q où se rencontrent les couples de côtés opposés AB et DE, AE et BC, déterminent la droite de Pascal qui va concourir avec le côté DC au même point R que la tangente en A; le point R où se coupent PQ et DC étant connu, en l'unissant au point A, on a la tangente cherchée.

Quel que soit le mode de construction adopté, on pourra toujours, A, B, C, D, E étant les cinq points donnés (*fig.* 33), construire les tangentes en trois de ces points, A, B, C; soient P et Q les points où se rencontrent ces tangentes en A et B, B et C, respectivement.

D'après le raisonnement fait pour établir une des propositions du n° IV, Chap. II, PM qui unit le point P où se coupent deux tangentes au milieu M de la corde des contacts AB est le diamètre de la courbe conjuguée de la direction AB; PM va donc passer par le centre, et il en est de même de QN, N étant le milieu de BC.

Si les deux droites PM, QN sont parallèles la courbe sera une parabole; dans le cas contraire, leur point commun O définira le centre de la courbe, et en menant par le point O, OP_1 parallèle à AB, et OQ_1 parallèle à BC, on aura deux systèmes de diamètres conju-

Fig. 33.



gués, en direction; ces deux couples de rayons associés déterminent l'involution du système des diamètres conjugués dont on cherchera les rayons doubles.

Si les rayons doubles sont réels, la courbe sera une hyperbole dont ces rayons seront les asymptotes; on pourra alors construire deux diamètres conjugués faisant un angle donné et en conséquence les axes, d'après ce qui a été dit au n° XIV, Chap. I; quant aux sommets, ce sont les intersections de la courbe et de l'un des axes qu'on peut construire d'après le n^os XV, Chap. I.

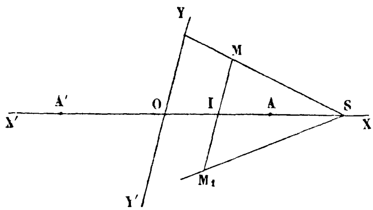
Si les rayons doubles n'existent pas, la courbe est une ellipse; on pourra construire les directions des axes, ou de deux diamètres conjugués faisant un angle donné, en conséquence des n^os V et VI, Chap. I.

Connaissant le centre, deux diamètres conjugués en direction, un point de la courbe, ainsi que la tangente en ce point, on peut déterminer les longueurs de ces diamètres au moyen de la proposition suivante :

Soient OX, OY deux diamètres conjugués, M un point de la courbe, et MS la tangente en M rencontrant

OX en S (*fig.* 34); si nous menons MI parallèle à OY, que nous la prolongions de la longueur IM_1 égale à IM, et que nous tracions la droite M_1S, cette droite sera la tangente à la courbe en M_1, et S sera le pôle de MM_1 par rapport à la conique. Dès lors, si A et A′ sont les extrémités du diamètre dirigé suivant OX, les quatre points A, A′, S, I forment une division harmonique; il

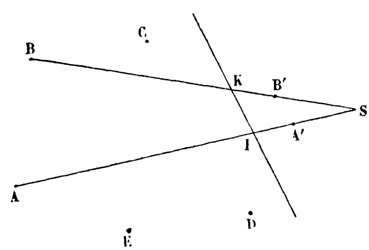
Fig. 34.



en résulte que : $\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = OI \times OS$; on aura donc les points A et A′ en construisant une moyenne proportionnelle entre OI et OS.

Supposons actuellement qu'on veuille mener deux tangentes à la conique dont on donne cinq points, A, B, C, D, E, par un point S de son plan (*fig.* 35).

Fig. 35.

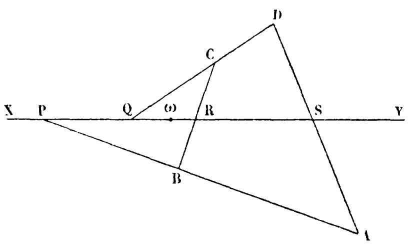


Nous construirons les droites SA, SB, et nous déterminerons leurs seconds points communs A′, B′, avec la courbe; puis nous construirons les points I et K conjugués harmoniques de S par rapport à A et A', B et B', respectivement; la droite IK sera la polaire de S par rapport à la conique et la coupera aux points de contact des tangentes cherchées. On déterminera ces points d'après la construction déduite du théorème établi au n° VI, Chap. II, et la question sera résolue.

Nous avons supposé les cinq points situés à distance finie; examinons les cas particuliers où un ou deux de ces points passent à l'infini dans des directions données :

1° *Un seul des points, soit* E, *passe à l'infini dans la direction* XY (*fig.* 36).

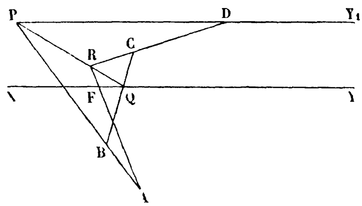
Fig. 36.



Desargues. — Si nous considérons le quadrilatère inscrit ABCD, le point conjugué de E, qu'on peut considérer comme situé à l'infini sur XY, dans l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S, où les côtés opposés du quadrilatère rencontrent XY, est le point central ω de cette involution; on peut déterminer ω et l'on rentre dans la première hypothèse.

Pascal. — Supposons les cinq points donnés : A, B, C, D, E; E à l'infini sur DY' (*fig.* 37). Menons arbitrairement AR par le point A, et proposons-nous de construire son second point commun avec la courbe, soit F. Dans l'hexagone inscrit ABCDEF, les couples de côtés opposés AB et DE (ou DY_1), AR et DC, déterminent la droite de Pascal, par leurs points communs P et R; l'intersection de PR avec BC donne le point Q ; le point F est déterminé par l'intersection de XY (ou EF), menée par Q parallèle à DY_1 avec AR. Comme dans la con-

Fig. 37.

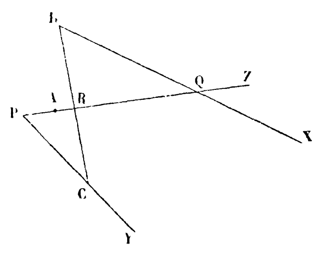


struction précédente, on rentre dans la première hypothèse. Dans ce cas, la courbe peut être une parabole ou une hyperbole.

2° *Deux des points passent à l'infini dans des directions différentes* BX, CY (*fig*. 38).

Desargues. — Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, D et E étant situés à l'infini dans les directions BX, CY respectivement (*fig*. 38). Considérons le quadri-

Fig. 38.

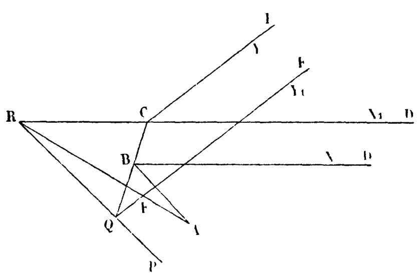


latère inscrit dont les côtés sont BC, BX, CY, et la droite DE située à l'infini. Menons par le point A une sécante quelconque AZ : son second point commun avec la courbe sera conjugué de A dans l'involution déterminée par les points P et Q et dont R est le centre, puisque son conjugué S est à l'infini sur DE.

Ce second point est facile à déterminer et situé à distance finie; en menant une seconde sécante dans une direction différente, on déterminera un cinquième point à distance finie et l'on rentrera dans la première hypothèse.

Pascal. — Soient les cinq points donnés A, B, C, D, E; D et E à l'infini dans les directions BX, CY (*fig.* 39); menons arbitrairement AR par le point A, et construisons son second point commun, F, avec la courbe. Dans

Fig. 39.



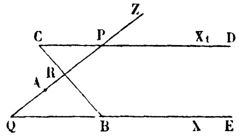
l'hexagone inscrit ABCDEF, les côtés opposés AB et DE, qui est à l'infini, se coupent au point P situé à l'infini sur AB; les côtés opposés AR et DC (ou CX_1, menée par C parallèle à BX), se coupent en R; la droite de Pascal sera donc la parallèle à AB menée par le point R qui est connu. L'intersection, Q, de cette droite avec BC est un point de EF; menant par ce point, Q, une parallèle à CY, soit QY_1, l'intersection de cette droite avec AR fait connaître le point F. On aura ainsi déterminé un quatrième point F à distance finie; on en construira un cinquième d'une manière analogue, et l'on rentrera dans la première hypothèse.

La courbe ne peut, dans ce cas, être qu'une hyperbole.

3° *Deux points passent à l'infini dans une même direction donnée.*

Desargues. — Soient A, B, C les trois points à distance finie, D et E à l'infini dans les directions CX_1, BX, qui sont parallèles (*fig.* 40).

Fig. 40.

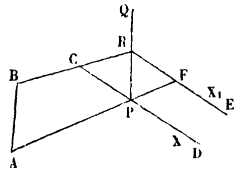


Considérons le quadrilatère inscrit BCDE, et menons par le point A une transversale quelconque AZ; son second point de rencontre avec la courbe sera le conjugué de A, dans l'involution déterminée par le couple de points P, Q, et le point R qui en est le centre, puisque son conjugué est à l'infini sur DE. On pourra facilement construire ce point situé à distance finie, et en construire de même un cinquième; on rentrera ainsi dans la première hypothèse. Dans ce cas, la conique ne peut être qu'une parabole.

Pascal. — Supposons les points A, B, C, D, E, F, A, où F est inconnu, D et E à l'infini dans les directions CX, FX_1, qui sont parallèles (*fig.* 41), unis deux à deux par des droites dans l'ordre où ils sont écrits. Menons par A la droite AF dans une direction arbitraire et cherchons son second point de rencontre F avec la courbe; les côtés opposés AF, CD se coupent en P; les côtés opposés consécutifs AB, DE se coupent à l'infini sur AB; la droite de Pascal est donc la parallèle PQ à AB menée par le point P, ce qui permet de la construire; les côtés opposés BC, FE vont concourir sur PQ en R, déterminé par la rencontre de PQ avec BC.

Menons par R la parallèle RX_1 à CX; son intersection avec AP détermine le point F. On trouverait, en me-

Fig. 41.



nant par A une droite dans une direction différente, un cinquième point, situé comme F à distance finie, et l'on rentrerait dans la première hypothèse.

Conséquences importantes. — 1° Quand on connaît cinq points d'une conique, tous les autres points peuvent être construits au moyen de l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal. Une droite passant par un des points donnés ne pouvant rencontrer la conique qu'en un autre point, cette courbe est absolument déterminée par cinq de ses points. En d'autres termes, *si deux coniques ont cinq points communs, elles se confondent.*

2° Une conique étant définie par cinq points, la même conique le sera par quatre de ces points et par un sixième point fourni par l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal; ou par quatre de ces points et la tangente en un de ces points, ou encore par trois de ces points et les tangentes en deux de ces points.

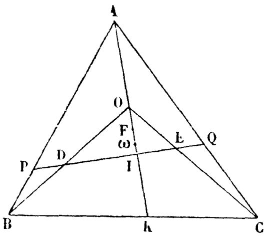
Cette substitution d'un élément point à un autre pouvant être réitérée un nombre de fois quelconque, il en résulte que : *si l'on donne cinq points, qu'on détermine consécutivement de nouveaux points par l'application de l'un des théorèmes de Desargues ou de Pascal, comme si les cinq premiers appartenaient à une conique; si en plus on peut trouver une conique* *passant par les cinq derniers, distincts ou confondus par couples, cette conique passera également par les cinq premiers.*

XIII. *Par cinq points situés dans un plan, et tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique.*

Remarquons d'abord que, si les cinq points donnés ne sont pas les sommets d'un pentagone convexe, on peut toujours par l'application, réitérée si cela est nécessaire, du théorème de Desargues, trouver cinq points sommets d'un pentagone convexe, et tels que, si l'on peut faire passer une conique par ces cinq points, elle passera par les cinq premiers.

Si les cinq points ne sont pas sommets d'un pentagone convexe, il ne peut se présenter que deux cas : ou deux d'entre eux sont intérieurs au triangle dont les trois autres sont les sommets, ou un seul d'entre eux est situé à l'intérieur d'un quadrilatère convexe dont les quatre autres sont sommets.

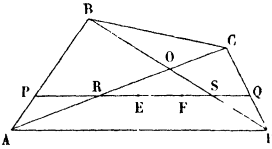
Fig. 42.



Examinons le premier cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés (*fig.* 42), D et E étant à l'intérieur du triangle dont A, B, C sont les trois sommets. La droite DE ne peut passer par aucun des trois sommets et doit, en conséquence, rencontrer le périmètre en deux points P et Q; les côtés opposés BD, CE du quadrilatère convexe BDEC vont se couper en O, à l'intérieur du triangle. Dès lors la droite AO rencontre le côté BC en K, situé entre B et C, et DE en I, situé entre D et E. Le point O est un des points doubles de l'involution déterminée sur AK par ses points de rencontre avec les côtés opposés du quadrilatère BDEC; il en résulte que le centre ω de cette involution est extérieur au segment IK; de plus, il est situé entre O et I, car, s'il était sur OA ou sur son prolongement, $\overline{\omega O}^2$ serait inférieur à $\omega I \times \omega K$, et, s'il était situé sur le prolongement de AK, $\overline{\omega O}^2$ serait, au contraire, supérieur au même produit. Le centre ω de l'involution dont on vient de parler, étant situé entre I et O, le point A et son conjugué F sont situés d'un même côté de ω, et le segment dont ils sont extrémités comprend le point double O. Le point F étant situé entre O et ω, le pentagone BDFEC est convexe, et une conique passant par ses sommets passera également par le point A.

Occupons-nous maintenant du deuxième cas. Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés, E étant situé à l'intérieur du quadrilatère convexe ABCD (*fig.* 43).

Fig. 43.



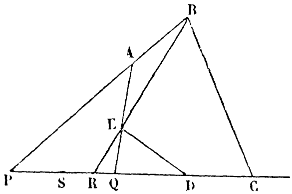
Construisons les diagonales AC, BD : le point E tombera à l'intérieur d'un des triangles AOD, BOC, DOC, AOB, soit du triangle AOD; considérons le quadrilatère

ACDB, et menons la transversale PEQ, parallèle à AD, rencontrant les couples de côtés opposés AB et CD, AC et BD, en P et Q, R et S, respectivement. Le segment RS étant intérieur au segment PQ, dans l'involution que déterminent les extrémités de ces segments, la puissance de cette involution est positive, et, comme le point E est intérieur au segment RS, il en est de même de son conjugué. Dès lors, les cinq points A, B, D, E, F, qu'on peut substituer aux cinq points A, B, C, D, E, rentrent dans le cas précédent.

Établissons actuellement la proposition suivante : *Si l'on considère un pentagone convexe, et qu'on applique à un de ses sommets la construction de la tangente définie par le théorème de Desargues, cette droite laissera les quatre autres sommets d'un même côté.*

Soit le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 44), appliquons la construction de la tangente au sommet A.

Fig. 44.



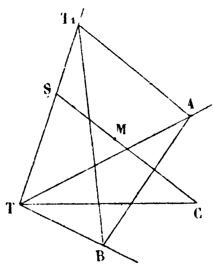
Dans ce but, imaginons le quadrilatère ayant pour côtés opposés AB et AE, BE et la tangente inconnue en A ; coupons la figure par la droite DC, rencontrant AB et AE en P et Q, BE et la tangente inconnue en A, en R et S. Le pentagone étant convexe, les points P et Q sont extérieurs au segment DC, d'un même côté ou de part et d'autre ; il en résulte que la puissance de l'involution déterminée par les deux couples de points D et C, P et Q, est positive. Dans le premier cas, qui est celui de la figure, le point R est compris entre les points P et Q; donc il en est de même de son conjugué S, et la tangente ne pouvant se mouvoir que dans l'intérieur de l'angle PAQ laisse les quatre points B, E, D, C d'un même côté; dans le second les points R et S sont extérieurs au segment PQ, et la conséquence est la même.

D'après cela, pour montrer qu'on peut faire passer une conique par cinq points quelconques, dont trois ne sont pas en ligne droite, il suffit d'établir la proposition pour cinq points sommets d'un pentagone convexe, et, d'après la dernière proposition établie, en construisant les tangentes en deux des sommets de ce pentagone convexe, l'angle de ces tangentes qui renferme la corde unissant les points de contact renfermera aussi les trois autres sommets.

Il suffit donc de montrer qu'on peut *construire une conique tangente à deux droites données en deux points donnés sur ces droites et passant par un troisième point situé dans l'angle de ces tangentes qui renferme le segment de droite unissant les points de contact.*

Pour résoudre la question, soient AT, BT les deux tangentes données, A et B étant les points de contact,

Fig. 45.



C le troisième point situé dans l'angle des tangentes renfermant AB (*fig.* 45). Par les points A et B, et dans un plan autre que le plan ABC, faisons passer un cercle quelconque et menons en A et B les tangentes AT_1, BT_1 à ce cercle. Le plan CTT_1 rencontre AB entre A et B; dès lors il rencontre le cercle en deux points : soit M un de ces points; joignons CM par une ligne droite et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre avec TT_1 en S. Si nous prenons S pour sommet d'un cône ayant pour directrice le cercle, le cône sera tangent aux deux plans TAT_1, TBT_1, et il sera coupé par le plan TAB suivant une conique tangente à AT et BT en A et B, et passant par le point C qui est la trace de la génératrice SM sur le plan ABC; cette conique répond à la question. Comme il y a deux points M sur le cercle, le même cercle donne deux solutions.

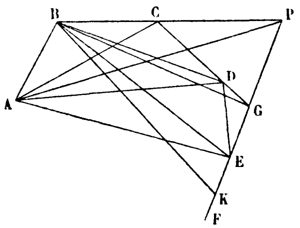
Construction de coniques définies par cinq données, points ou tangentes réels, situés à distance finie, d'après les théorèmes précédents.

XIV. Le premier de ces problèmes, construire une conique, connaissant cinq de ses points, a été résolu avec détail dans le numéro qui précède de deux rangs, et nous avons montré dans le précédent que par cinq points, tels qu'il n'y en ait pas plus de deux en ligne droite, on peut toujours faire passer une conique. Nous allons nous occuper actuellement de la construction d'une conique dont on donne cinq autres éléments, points ou tangentes :

1° *Construire une conique, connaissant cinq de ses tangentes.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 46); considérons les quatre dernières comme formant un quadrilatère circonscrit dont les quatre sommets sont C, D, E et P, où se rencontrent BC et EF. Prenons un point quelconque A sur la première et unissons-le par des lignes droites aux sommets D, P, C, E du quadrilatère; la seconde tangente, issue du point A, est le rayon conjugué de AB dans le faisceau en involution

Fig. 46.

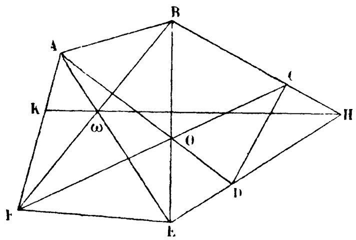


défini par les couples des rayons AC et AE, AD et AP; en construisant ce rayon, on aura une sixième tangente et l'on pourra ainsi s'en procurer autant qu'on voudra.

Considérons une des cinq tangentes données EF, et proposons nous de trouver son point de contact, soit K; CD, DE, EK, KF peuvent être considérées comme formant un quadrilatère circonscrit dont les sommets sont D, E, K et G, intersection de CD et FK; si nous unissons le point B à ces sommets par des lignes droites, BK sera le rayon conjugué de BD dans le faisceau en involution déterminé par le couple des rayons BA, BC qui sont tangents, et par le couple BE, BG qui unissent le point B à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit; on construira le rayon BK dont l'intersection avec EF donnera le point de contact K.

Brianchon. — Soient AB, BC, CD, DE, EF les cinq tangentes données (*fig.* 47); prenons arbitrairement le point A sur la tangente AB; A, B, C, D, E peuvent être considérés comme cinq sommets d'un hexagone circonscrit, dont F serait le sixième; les droites AD, BE, qui sont deux diagonales unissant deux sommets opposés, déterminent le point O par leur intersection; la troisième diagonale passe par C et O et détermine le sommet F et la tangente AF par sa rencontre avec EF.

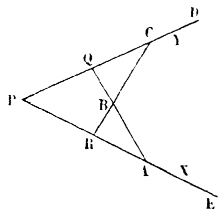
Fig. 47.



Considérons une tangente, soit AF qu'on vient de construire, et cherchons son point de contact K. Les six points A, B, H, E, F, et K, qui est inconnu, peuvent être pris pour six sommets d'un hexagone circonscrit; construisons les diagonales AE, BF unissant deux sommets opposés, leur intersection détermine le point ω; la troisième diagonale passe par H et ω et va couper AF au point cherché K.

L'une des cinq tangentes est donnée à l'infini. (La courbe, dans ce cas, ne peut être qu'une parabole.)

Fig. 48.

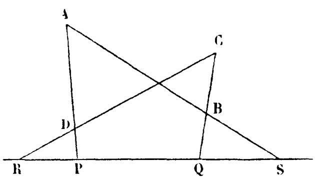


Les constructions précédentes continuent à s'appliquer en considérant deux des sommets du pentagone formé par les cinq tangentes données; soient D et E comme situés à l'infini sur les côtés extérieurs PX, PY du quadrilatère complet, dont les quatre côtés sont les tangentes, restant à distance finie (*fig.* 48).

2° *Construire une conique, connaissant quatre de ses points et une de ses tangentes.*

Desargues. — Considérons le quadrilatère inscrit ABCD, dont les quatre sommets sont les quatre points donnés, et soit RS la tangente donnée (*fig.* 49). Les couples de points P et Q, R et S, où la tangente est rencontrée par les couples des côtés opposés du quadrilatère, déterminent une involution dont font partie les points de

Fig. 49.



rencontre de la tangente et de la conique, et, comme ces points se réduisent à un, puisque la droite est tangente, le point de contact est l'un des points doubles de cette involution. On pourra, d'après cela, déterminer le point de contact et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points; comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

La tangente peut être donnée à l'infini. (La courbe est alors une parabole.)