NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 60-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__60_0>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge.

1. *Est-il possible de faire réprésenter un point du plan des axes par une solution*

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

sous la condition que le point représentatif de cette solution, dont les coordonnées x_1 *et* y_1 *seraient des fonctions de* α, β, α', β', *conserve une position invariable dans le plan, quelque transformation que l'on fasse subir aux axes et, par suite, à la solution considérée?*

Et d'abord, si x_1 doit être fourni par la formule

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

il faudra que y_1 le soit par

$$y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta);$$

sans quoi l'échange des deux axes des x et des y ne laisserait pas le point (x_1, y_1) à la même place.

Supposons donc que les formules

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \quad \text{et} \quad y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta)$$

remplissent la condition exigée.

Si l'on transporte l'origine sur l'axe des x à une distance a de l'ancienne, les formules de transformation seront

$$x' = x - a$$
$$y' = y,$$

de sorte que la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

deviendra

$$x' = \alpha - a + \beta\sqrt{-1}, \qquad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1};$$

le point (x'_1, y'_1) deviendrait donc

$$x'_1 = \varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta'),$$
$$y'_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha - a, \beta);$$

pour qu'il ait conservé la même situation, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 soient liées à x_1, y_1 par les formules de transformation, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') - a$$

et

$$\varphi(\alpha' - \beta', \alpha - a, \beta) = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

quels que soient α, β, α', β' et a.

Ces conditions exigent évidemment, d'abord, que α n'entre pas dans la fonction φ relative à y_1 ni, par conséquent, α' dans la fonction φ relative à x_1; en second lieu, que la fonction φ relative à x_1 ne contienne α qu'au premier degré, sans coefficient, et de même, que la fonction φ relative à y_1 ne contienne α' qu'au premier degré, sans coefficient.

Ainsi la transformation considérée conduit à conclure que x_1 et y_1 doivent respectivement affecter les formes

$$x_1 = \alpha + \psi(\beta, \beta')$$
$$y_1 = \alpha' + \psi(\beta', \beta).$$

Considérons maintenant la transformation dans laquelle l'axe des y aurait simplement tourné autour de l'origine, de manière à faire avec l'axe des x, resté fixe, l'angle supplémentaire de celui qu'il faisait auparavant.

Les formules de transformation seront

$$y' = y \qquad \text{et} \qquad x' = x + 2\cos\theta y;$$

la solution $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ deviendra donc

$$\begin{aligned} y' &= \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \\ x' &= \alpha + \beta\sqrt{-1} + 2\cos\theta(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Le point représentatif de la solution transformée serait donc

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta') \\ y'_1 &= \alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta); \end{aligned}$$

mais, pour que le point représenté soit resté le même, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 et x_1, y_1 soient liées par les formules de transformation, c'est-à-dire que

$$y'_1 = y_1 \qquad \text{et} \qquad x'_1 = x_1 + 2y_1\cos\theta$$

ou que

$$\alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta) = \alpha' + \psi(\beta', \beta)$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta') \\ &\quad = \alpha + \psi(\beta, \beta') + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta', \beta)]. \end{aligned}$$

La première condition montre que la fonction ψ relative à y_1 ne doit pas contenir β et, par suite, que la fonction ψ relative à x_1 ne doit pas non plus contenir β'.

En conséquence, il faudra réduire x_1 et y_1 à

$$x_1 = \alpha + \chi(\beta) \qquad \text{et} \qquad y_1 = \alpha' + \chi(\beta').$$

Mais alors la condition

$$x'_1 = x_1 + 2y_1\cos\theta$$

se réduit à

$$\alpha + 2\alpha' \cos\theta + \psi(\beta + 2\beta' \cos\theta)$$
$$= \alpha + \psi(\beta) + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta')]$$

ou

$$\psi(\beta + 2\beta' \cos\theta) = \psi(\beta) + 2\cos\theta\,\psi(\beta'),$$

ce qui exige que ψ soit du premier degré et sans constante.

En résumé, on est amené à faire obligatoirement

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'.$$

Il est, du reste, facile de vérifier que, dans ces conditions, le point représentatif d'une solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

restera toujours le même, quelque transformation des coordonnées qui intervienne.

En effet, si les formules de transformation sont

$$x' = a + mx + ny,$$
$$y' = b + px + qy,$$

la solution transformée de

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

sera

$$x' = a + m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$
$$y' = b + p\alpha + q\alpha' + (p\beta + q\beta')\sqrt{-1};$$

les points représentatifs de ces deux solutions seront donc

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'$$

et

$$x'_1 = a + m\alpha + n\alpha' + k(m\beta + n\beta') = a + mx_1 + ny_1,$$
$$y'_1 = b + p\alpha + q\alpha' + k(p\beta + q\beta') = b + px_1 + qy_1,$$

les coordonnées anciennes et nouvelles de ces deux points seront donc liées entre elles par les formules de transformation : les deux points coïncideront donc.

Il n'y aurait aucun avantage à donner à k une valeur différente de 1 ; nous ferons donc toujours

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

2. Les solutions imaginaires $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ d'une équation à deux variables $f(x, y) = 0$ présentent une double indétermination, c'est-à-dire que les quatre variables α, β, α', β' ne sont liées entre elles que par deux conditions, celles dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0.$$

Il en résulte que les points (x_1, y_1) représentatifs de toutes les solutions imaginaires d'une équation $f(x, y) = 0$ formeront plaque sur le Tableau.

Sur la surface recouverte par ces points (x_1, y_1), on pourra tracer une infinité de courbes : l'une d'elles sera définie par une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0.$$

La théorie donnera les moyens de les étudier toutes ; mais la classe de celles dont les points correspondraient à des solutions qui pussent être rendues réelles, en même temps, par rapport à l'une des variables, x par exemple, par une transformation convenable des coordonnées, présentera un intérêt tout particulier, parce que ces courbes auront des rapports beaucoup plus intimes que toutes les autres avec la courbe réelle représentée par la même équation $f(x, y) = 0$; en effet, dans un système convenable de coordonnées, les ordonnées de l'une de ces courbes et de la courbe réelle seront respectivement représentées par deux fonctions conjointes de l'abscisse commune

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}$$

et

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)},$$

analogie algébrique d'où résulteront une infinité d'analogies géométriques, qui permettront d'instituer une *Géométrie comparée.*

Les lieux courbes contenus dans le lieu plan $f(x,y)=0$ qui sont définis par la condition précédente sont désignés sous le nom de *conjuguées* du lieu réel $f(x,y)=0$.

Cherchons la condition complémentaire qu'il faudra joindre à l'équation $f(x, y) = 0$ pour définir une des conjuguées de ce lieu, c'est-à-dire cherchons le caractère commun de toutes les solutions imaginaires de l'équation d'un lieu, qui pourraient devenir en même temps réelles par rapport à l'abscisse, à la suite d'une transformation convenable de coordonnées.

Soient

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}$$

et

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}$$

les formules d'une transformation; on en tire

$$\begin{aligned}&[x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')] \sin\theta \\ &\quad = x'[\sin\alpha' \sin(\theta - \alpha) - \sin\alpha \sin(\theta - \alpha')].\end{aligned}$$

Si donc on veut que les x' soient réels, il faudra que x et y soient tels que

$$x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')$$

soit réel, c'est-à-dire, si $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, que

$$\beta \sin\alpha' - \beta' \sin(\theta - \alpha') = 0$$

ou que

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta - \alpha')},$$

condition indépendante, comme on le voit, de l'équation du lieu considéré.

Ainsi, l'on pourra rendre en même temps réelles, par rapport à l'abscisse nouvelle, les solutions de toutes les équations à deux variables où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une même valeur C.

La constante $C = \frac{\beta'}{\beta}$ qui définit une conjuguée d'un lieu $f(x, y) = 0$ est ce que nous nommerons la *caractéristique* de cette conjuguée.

On voit que cette caractéristique

$$C = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta - \alpha')}$$

est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner au nouvel axe des y pour rendre en même temps réelles les abscisses nouvelles de tous les points de la conjuguée.

Ainsi l'équation de la conjuguée C d'un lieu

$$f(x, y) = 0$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = C$$

et

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

mais on ne se servira jamais de cette équation d'une conjuguée en coordonnées réelles. Cette équation serait de degré $m(m-1)$ ou de degré m^2 suivant que l'équation $f(x, y)=0$, de degré m, aurait tous ses coefficients réels ou en aurait d'imaginaires ; mais la conjuguée elle-même sera bien plus facile à étudier dans l'équation $f(x, y)=0$, qui la représente en coordonnées imaginaires, que dans celle qui la représenterait en coordonnées réelles.

Les conjuguées d'un lieu de degré m présentent, en effet, comme on le verra, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique, tous les caractères des courbes de degré m.

Nous démontrerons d'ailleurs, et c'est, en définitive, le but que nous nous proposons, que toute question quelconque, résolue déjà pour le lieu réel $f(x, y)=0$, l'est par cela même, au moyen des mêmes formules, pour une quelconque de ses conjuguées, moyennant une interprétation toujours très simple.

Cordes réelles d'une conjuguée. — Une équation $y=Cx+d$, dans laquelle d peut prendre toutes les valeurs réelles, n'est capable que de solutions du système C; en effet, si l'on y fait $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, il vient

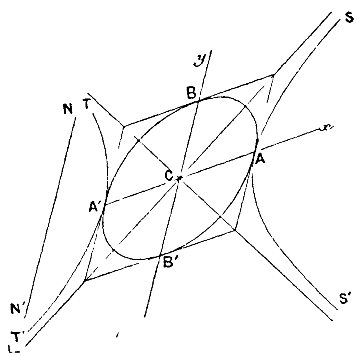
$$\alpha'=C\alpha+d \quad \text{et} \quad \beta'=C\beta;$$

on voit donc qu'on pourrait directement construire la conjuguée C d'un lieu $f(x, y)=0$, en recherchant toutes les solutions communes à l'équation $f(x, y)=0$ et à l'équation $y=Cx+d$, dans laquelle on ferait varier d de $-\infty$ à $+\infty$; au reste le point $x_1=\alpha+\beta$, $y_1=\alpha'+\beta'$, qui représenterait une de ces solutions, appartiendrait à la sécante considérée $y=Cx+d$, car les deux équations précédentes donnent

$$\alpha'+\beta'=C(\alpha+\beta)+d.$$

3. *Conjuguées des coniques.* — Soit C (*fig.* 1) une ellipse quelconque, cherchons la conjuguée de cette

Fig. 1.



ellipse dont les cordes réelles sont parallèles à la droite NN′: pour cela rapportons la courbe au diamètre parallèle à NN′, pris pour axe des y, et à son conjugué, pris pour axe des x; l'équation de l'ellipse prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

si l'on donne à x des valeurs non comprises entre $-a'$ et $+a'$, l'ordonnée du lieu sera imaginaire et représentée par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{x'^2 - a'^2}\sqrt{-1},$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{x_1^2 - a'^2};$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

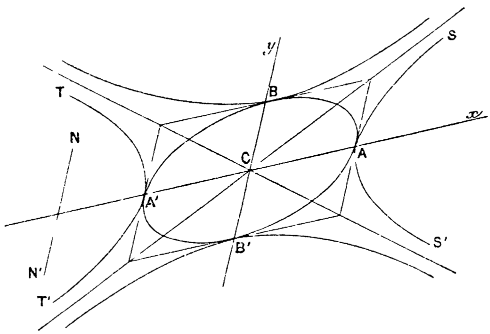
$$\frac{x_1^2}{a'^2} - \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'hyperbole SAS'TA'T' ayant pour diamètre non transverse le diamètre de l'ellipse parallèle aux cordes réelles de cette même conjuguée, et pour diamètre transverse le diamètre conjugué du premier.

Ainsi les conjuguées d'une ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles recouvrent tout le plan, sauf l'intérieur de l'ellipse, et cette ellipse est l'enveloppe de ses conjuguées. Nous savions déjà qu'il en est de même de toutes les courbes : une courbe quelconque est l'enveloppe de ses conjuguées, ou d'une partie de ses conjuguées.

Considérons maintenant une hyperbole (*fig.* 2) : les

Fig. 2.



parallèles à un rayon compris dans les angles des deux asymptotes qui comprennent eux-mêmes la courbe réelle rencontreraient tous cette courbe en deux points réels; ainsi les cordes réelles des conjuguées d'une hyperbole sont parallèles aux diamètres non transverses de cette courbe; en d'autres termes, quels que soient les axes auxquels une hyperbole soit rapportée, la caractéristique $C = \frac{\beta'}{\beta}$ d'une conjuguée ne peut varier qu'entre les valeurs extrêmes des coefficients angulaires des diamètres non transverses de la courbe. C'est un fait général en ce sens que, si une courbe de degré m est toujours coupée en m points réels par toutes les droites parallèles aux rayons d'un secteur, la courbe n'a pas de conjuguée dont la caractéristique soit comprise entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes de ce secteur, et ces rayons extrêmes ont généralement des directions asymptotiques, parce que, généralement, on peut mener à la courbe plus de tangentes inclinées à une asymptote, dans un sens, qu'on n'en peut mener qui soient inclinées dans le sens contraire. Au reste, cela ne veut pas dire qu'une courbe n'ait jamais de conjuguées dont les cordes réelles aient des directions parallèlement auxquelles on ne pourrait pas lui mener de tangentes.

Supposons que nous voulions connaître la conjuguée de l'hyperbole $SAS'TA'T'$, dont les cordes réelles seraient parallèles à une droite NN' parallèle à un diamètre BB' non transverse de cette hyperbole ; prenons pour axe des y ce diamètre BB' et son conjugué AA' pour axe des x, l'équation de l'hyperbole prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

et si l'on donne à x des valeurs comprises entre $-a'$ et $+a'$, y sera imaginaire et représenté par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}\sqrt{-1},$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x_1^2}.$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0 ;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'ellipse B A B' A', ayant pour diamètres les deux diamètres de l'hyperbole considérée, qui seraient parallèles, l'un aux cordes réelles de la conjuguée, et l'autre au diamètre conjugué du premier.

Ainsi, les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun. Elles ont deux enveloppes, l'une réelle, c'est l'hyperbole proposée, l'autre imaginaire, qui est l'hyperbole de mêmes axes, mais changés de réels en imaginaires, et réciproquement. Cette seconde enveloppe est ordinairement désignée sous le nom d'*hyperbole conjuguée de la première;* mais nous l'appellerons plutôt *supplémentaire de la proposée,* parce que, lorsque les conjuguées d'une courbe ont deux enveloppes, l'enveloppe imaginaire présente toujours tous les caractères d'une véritable supplémentaire de la courbe elle-même ou de l'enveloppe réelle.

Les deux enveloppes ont ici les mêmes asymptotes, c'est un fait qui sera généralisé.

Les conjuguées d'une hyperbole recouvrent toute la portion du plan comprise entre cette hyperbole et sa supplémentaire, et aucune ne peut pénétrer dans l'intérieur de la concavité de l'une ou de l'autre des deux hyperboles.

Les points de l'enveloppe imaginaire, ou de l'hyperbole supplémentaire, seraient fournis par les solutions imaginaires sans parties réelles de l'équation de l'hyperbole proposée, rapportée à deux de ses diamètres conjugués quelconques a et b.

En effet, si dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

on fait

$$x = \beta\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad y = \beta'\sqrt{-1},$$

il vient

$$\frac{\beta^2}{a^2} - \frac{\beta'^2}{b^2} + 1 = 0;$$

les coordonnées réalisées du point correspondant sont

$$x_1 = \beta, \qquad y_1 = \beta',$$

et elles sont liées par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} + 1 = 0,$$

qui représente bien l'hyperbole supplémentaire.

Le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ du lieu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, en un point de l'enveloppe imaginaire, se réduit ici à $\frac{d\beta'}{d\beta}$ et est, par conséquent, réel. Nous verrons bientôt que c'est le caractère général de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque.

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée d'une hyperbole tend vers le coefficient angulaire d'une des asymptotes, la conjuguée correspondante s'aplatit indéfiniment et, à la limite, se confond avec l'asymptote elle-même, qu'elle recouvre deux fois. Nous verrons plus tard que le fait est général et même que les conjuguées d'une courbe de degré quelconque tendent, dans une de leurs parties, à devenir des ellipses, lorsque leur caractéristique tend vers le coefficient angulaire d'une asymptote réelle.

On verrait, comme précédemment, que les conjuguées d'une parabole sont des paraboles égales à la proposée et opposées à elle par un diamètre commun et une tangente commune.

Les conjuguées d'une ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

sont toutes les hyperboles qui ont avec l'ellipse réelle correspondante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un système de diamètres conjugués commun. Seulement, c'est alors le diamètre transverse de la conjuguée qui est parallèle à ses cordes réelles.

L'enveloppe imaginaire de ces conjuguées est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elle est fournie par les solutions imaginaires, sans parties réelles, de l'équation du lieu lui-même,

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

c'est-à-dire par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1},$$

réalisées par

$$x_1 = \beta, \qquad y_1 = \beta'.$$

En un quelconque des points de cette enveloppe imaginaire, le coefficient angulaire $\frac{dy}{du}$ du lieu est réel.

Les conjuguées de l'ellipse évanouissante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

sont naturellement réduites à leurs asymptotes, c'est-à-dire sont des droites. Les conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles à une droite donnée sont les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à l'ellipse évanouissante, dont l'un serait parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée.

4. *Des éléments d'un lieu en un de ses points et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.* — Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ en un point x, y d'un lieu

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

ce rapport n'a qu'une valeur, quel que soit dx, c'est-à-dire que si l'on donne à x l'accroissement

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

l'accroissement correspondant de y,

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$

sera toujours lié à l'accroissement de x par la même relation

$$d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}),$$

quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$ l'un par rapport à l'autre.

Soit $m + n\sqrt{-1}$ la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ au point x, y, les accroissements correspondants de x et de y seront donc liés l'un à l'autre par la relation

$$d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1} = (m - n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

qui se décompose en deux

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta,$$

et

$$d\beta' = m\,d\beta + n\,d\alpha.$$

Soient, suivant notre notation habituelle, x_1 et y_1 les coordonnées du point représentatif de la solution, x, y, $y_1 + dx_1$ et $y_1 + dy_1$ celles d'un point infiniment voisin, de sorte que

$$dx_1 = d\alpha + d\beta \qquad \text{et} \qquad dy_1 = d\alpha' + d\beta';$$

les deux équations précédentes donnent

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha' - d\beta'}{d\alpha - d\beta} = \frac{(m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta}{d\alpha + d\beta}$$

ou

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m + n + (m-n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

$\frac{dy_1}{dx_1}$ pourra donc prendre habituellement une infinité de valeurs, qui dépendront de $\frac{d\beta}{d\alpha}$; c'est-à-dire qu'autour du point x_1, y_1, qui correspond à la solution x, y de l'équation $f(X, Y) = 0$, le lieu en présentera généralement une infinité d'autres, placées dans toutes les directions, ce qui est tout naturel, puisque ce lieu constitue une surface. Les lignes droites qui joindraient le point $[x_1, y_1]$ aux points $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ constituent les éléments du lieu au point $[x_1, y_1]$.

Pour que tous ces éléments se confondissent géométriquement, il faudrait que $\frac{dy_1}{dx_1}$ fut indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, ce qui exigerait que

$$\frac{m-n}{1} = \frac{m-n}{1}$$

ou que $n = 0$.

Ainsi, aux points d'un lieu où $\frac{dy}{dx}$ est réel, tous les éléments de ce lieu se confondent, c'est-à-dire que toutes les courbes, lieux de points $[x_1, y_1]$, qui y passent, s'y touchent.

C'est là la propriété caractéristique de la limite, réelle ou imaginaire, de la portion du plan recouverte par tous les points imaginaires réalisés d'un lieu quelconque ; les deux enveloppes réelle et imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque seront donc fournies simultanément par la condition commune :

$$\frac{dy}{dx} \text{ est réel.}$$

Nous allons donner deux exemples d'une telle recherche. Soit d'abord le lieu

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{3y^2 - a^2};$$

pour que $\frac{dy}{dx}$ soit réel, il faut que y soit de la forme $\beta'\sqrt{-1}$; alors x sera de la forme $\beta\sqrt{-1}$. D'ailleurs, ces valeurs de x et y devant satisfaire à l'équation du lieu, on aura

$$-\beta'^3 - a^2\beta' + a^2\beta = 0 :$$

l'équation de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu est donc

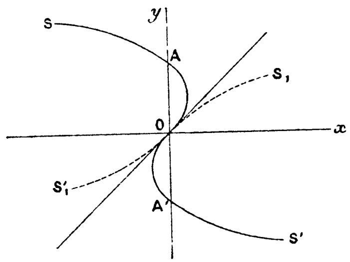
$$y^3 + a^2 y - a^2 x = 0.$$

La courbe réelle, ou l'enveloppe réelle des conjuguées du lieu, est SAOA'S' (*fig.* 3), et l'enveloppe imaginaire est $S_1OS'_1$. Ces deux enveloppes se touchent à l'origine, qui est pour elles deux un point d'inflexion, et elles sont réciproques.

Nous verrons plus tard qu'il en est toujours ainsi :

les deux enveloppes sont toujours réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que chacune d'elles est l'enveloppe

Fig. 3.



imaginaire des conjuguées de l'autre, et les deux courbes ont les mêmes points d'inflexion, où d'ailleurs elles se tournent leurs convexités.

Considérons, comme second exemple, le lieu représenté par l'équation

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

qui se présentera de lui-même dans la théorie des courbures et auquel nous donnons le nom de *cercle imaginaire*.

Soient $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point du lieu, α, β, α' et β' satisferont aux deux conditions

$$(1)\quad (\alpha-a)^2-(\beta-b)^2+(\alpha'-a')^2-(\beta'-b')^2=r^2-r'^2$$

et

$$(2)\qquad (\alpha-a)(\beta-b)+(\alpha'-a')(\beta'-b')=rr';$$

le coefficient différentiel $\dfrac{dy}{dx}$ aura pour valeur en ce point

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a-b\sqrt{-1}}{y-a'-b'\sqrt{-1}}=\frac{\alpha-a+(\beta-b)\sqrt{-1}}{\alpha'-a'+(\beta'-b')\sqrt{-1}},$$

et, pour qu'il soit réel, il faudra que

$$(3)\qquad \frac{\alpha - a}{\alpha' - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}.$$

L'équation (3) donne

$$\beta - b = \frac{\alpha - a}{\alpha' - a'}(\beta' - b');$$

en substituant dans les deux autres, il vient

$$(1\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha - a)^2 - \frac{(\alpha - a)^2}{(\alpha' - a')^2}(\beta' - b')^2 \\ &\qquad + (\alpha' - a')^2 - (\beta' - b')^2 = r^2 - r'^2 \end{aligned}\right.$$

ou

$$(1\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 \\ &\quad - (\beta' - b')^2 \frac{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2}{(\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2 \end{aligned}\right.$$

et

$$(2\ bis)\qquad \left[\frac{(\alpha - a)^2}{\alpha' - a'} + (\alpha' - a')\right](\beta' - b') = rr'$$

ou

$$(2\ ter)\qquad (\beta' - b') = \frac{rr'(\alpha' - a')}{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2};$$

éliminant maintenant $\beta' - b'$, il vient

$$(4)\quad (\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 - \frac{r^2 r'^2}{(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2,$$

c'est-à-dire

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2]^2 \\ &\quad - (r^2 - r'^2)[(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2] - r^2 r'^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui donne

$$(4\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha^2 - a)^2 + (\alpha' - a')^2 \\ &\quad = \frac{r^2 - r'^2 \pm \sqrt{(r^2 - r'^2)^2 + 4r^2 r'^2}}{2} = r^2 \quad \text{ou} \quad -r'^2; \end{aligned}\right.$$

mais $(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2$ ne saurait être négatif; par conséquent, en définitive, la solution est

$$(4\ quater)\qquad (\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 = r^2,$$

c'est-à-dire que α et α' sont les coordonnées d'un point de la circonférence

$$(5)\qquad (x - a)^2 + (y - a')^2 = r^2.$$

L'équation (1) donne, par suite,

$$(6)\qquad (\beta - b)^2 + (\beta' - b')^2 = r'^2,$$

et, par conséquent, β et β' sont les coordonnées d'un point du cercle

$$(x - b)^2 + (y - b')^2 = r'^2;$$

mais l'équation (3)

$$\frac{\alpha - a}{\alpha' - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}$$

montre que les rayons des deux circonférences (5) et (6), qui contiendront respectivement les points (α, α') et (β, β') seront parallèles.

Il en résulte que l'enveloppe imaginaire du lieu proposé est la circonférence du cercle

$$(x - a - b)^2 + (y - a' - b')^2 = (r + r')^2.$$

En effet, soient, par rapport aux axes Ox et Oy (*fig.* 4), C et C′ les points dont les coordonnées sont a et a' pour le premier, b et b' pour le second; CA et CB, deux rayons parallèles des deux circonférences décrites de C et de C′ comme centres, avec r et r' pour rayons; les projections de CA et de C′B sur Ox seront respectivement

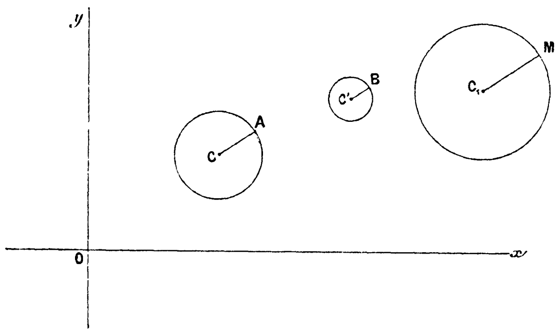
$$\alpha - a \quad \text{et} \quad \beta - b.$$

et leurs projections sur Oy seront

$$\alpha' - a' \quad \text{et} \quad \beta' - b';$$

en conséquence, si l'on construit le point C_1, dont les coordonnées soient $a + b$ et $a' + b'$, et qu'autour du

Fig. 4.



point C_1 on décrive une circonférence de rayon $r + r'$, cette circonférence sera le lieu cherché.

En effet, les coordonnées d'un point M de cette circonférence seront

$$x_1 = a + b + \alpha - a + \beta - b = \alpha + \beta$$

et

$$y_1 = a' + b' + \alpha' - a' + \beta' - b' = \alpha' + \beta'.$$

5. *De la ligne droite.* — Les conjuguées d'une ellipse étant toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun, les conjuguées d'une ellipse évanouissante, telle que le lieu représenté par l'équation

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = 0,$$

seront des hyperboles réduites à leurs asymptotes; chacune de ces conjuguées sera composée des diagonales de l'un des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à la proposée, par rapport à leur centre commun, telle que

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = k^2.$$

Ainsi, les conjuguées du lieu

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = 0$$

constituent deux faisceaux de droites, émergeant l'un et l'autre du point réel

$$nx + q = 0, \qquad y - mx - p = 0.$$

où se réduit l'ellipse évanouissante.

L'un de ces faisceaux constitue le système des conjuguées du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

et l'autre, le système des conjuguées du lieu

$$y = (m - n\sqrt{-1})x + p - q\sqrt{-1}.$$

Considérons l'un de ces lieux en particulier.

On pourra toujours déterminer $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$, de façon que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

admette deux solutions imaginaires données (x', y') et (x'', y''); l'équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(n - n')$$

répondrait, en effet, à la question.

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') ont été pris sur une même conjuguée C d'un lieu $f(x, y) = 0$, la droite de caractéristique C du lieu

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

sera une sécante effective, quoique représentée en coordonnées imaginaires, de la conjuguée C du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') tendent à se confondre sur la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra tangente à la même conjuguée. Enfin, si les deux points (x', y'), (x'', y'') s'éloignent à l'infini sur la même conjuguée C du même lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra asymptote à cette conjuguée.

On voit par là que la forme imaginaire sous laquelle sont représentées les droites d'un faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x - p + q\sqrt{-1}$$

ne s'opposera aucunement à la solution des questions relatives aux tangentes et aux asymptotes, aux courbes représentées elles-mêmes en coordonnées imaginaires.

Au contraire, il est clair qu'il fallait bien qu'une droite fût imaginairement représentée pour pouvoir entrer analytiquement en concurrence avec une courbe, représentée elle-même imaginairement.

L'important était de constater que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x - p + q\sqrt{-1}$$

contient juste le nombre de constantes arbitraires suffisant, sans superfétation, pour permettre d'établir tel concours que l'on voudrait entre une droite du faisceau

$$y = (m - n\sqrt{-1})x - p + q\sqrt{-1}$$

et une conjuguée désignée d'un lieu donné.

Il en sera toujours de même dans toutes les recherches possibles. C'est ainsi, par exemple, que l'étude préalable des conjuguées du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

se trouvera tout naturellement désignée pour présider aux recherches relatives aux courbures des conjuguées d'un lieu quelconque.

L'équation en coordonnées réelles de la conjuguée C du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = (m + n\sqrt{-1})(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + p + q\sqrt{-1},$$
$$\beta' = C\beta,$$
$$x_1 = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + \beta' :$$

c'est

$$y_1 = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right)x_1 + p + q + \frac{2qn}{m - n - C};$$

mais on ne s'en sert jamais sous cette forme compliquée, par la raison que, dans les recherches théoriques sur une conjuguée désignée d'un lieu donné, on suppose toujours qu'on ait d'abord rendu réelles les abscisses des points de cette conjuguée, par un choix convenable d'axes, et que les droites imaginaires, utiles à considérer, doivent alors, nécessairement, avoir aussi leurs abscisses réelles.

Or, si l'on suppose les β nuls, $C = \frac{\beta'}{\beta}$ est alors infini, et l'équation précédente se réduit à

$$y_1 = (m + n)x_1 + p + q.$$

Lorsque le coefficient angulaire $m + n\sqrt{-1}$ d'un faisceau de droites imaginaires devient réel, c'est-à-dire lorsque l'équation du faisceau se réduit à

$$y = mx + p + q\sqrt{-1},$$

toutes les conjuguées du faisceau se replient sur la même droite

$$y_1 = mx_1 + p + q;$$

on le vérifie aisément.

6. *Des tangentes aux courbes imaginaires.* — Si deux équations

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

ont une solution commune (x, y), et que, d'ailleurs, ces deux équations fournissent pour $\frac{dy}{dx}$, en ce point, la même valeur $m + n\sqrt{-1}$, les deux lieux admettront les mêmes éléments autour du point (x_1, y_1), qui représenterait la solution commune; ils auront autour de ce point un disque élémentaire commun dont le contour sera défini par les équations

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta$$

et

$$d\beta' = n\,d\alpha + m\,d\beta;$$

d'où

$$d\alpha' + d\beta' = (m + n)\,d\alpha + (m - n)\,d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m + n + (m - n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

Si l'on considère, en particulier, les deux courbes, définies séparément par les deux équations proposées $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$ et par une relation complémentaire commune, d'ailleurs arbitraire,

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ aura la même valeur de part et d'autre, et les deux courbes seront tangentes.

Les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

remplissent les deux conditions imposées, quelle que soit la solution (x, y) de $f(X, Y) = 0$, et si, au lieu d'une condition quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, on introduit la condition

$$\frac{\beta'}{\beta} = C,$$

C désignant la caractéristique du point (x, y), d'une part, la courbe tracée sur le lieu $f(X, Y) = 0$ sera la conjuguée C de ce lieu; d'autre part, la courbe tracée sur le lieu

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = (m + n\sqrt{-1})(X - x)$$

sera la droite de caractéristique C du faisceau correspondant, et la droite sera tangente à la courbe.

Donc la tangente à la conjuguée d'un lieu $f(X, Y) = 0$, au point (x_1, y_1) de cette conjuguée qui correspond à la solution (x, y), est la conjuguée C du faisceau

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(X - x).$$

Des tangentes menées par un point extérieur réel *à un lieu représenté par une équation algébrique, et application aux courbes du second degré.* — Soient $f(X, Y) = 0$ l'équation du lieu proposé, et x_0, y_0 les coordonnées du point donné, les coordonnées x et y du point de contact inconnu seront fournies par les deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

z_0 représentant 1.

Les solutions de ces deux équations seront en nombre $m(m-1)$, si m est le degré de $f(x, y)$. Aux solutions réelles correspondront des tangentes réelles menées du point (x_0, y_0) au lieu réel.

Si les deux équations admettent les solutions imaginaires conjuguées

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},$$

le faisceau de droites que représenterait l'équation

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0$$

contiendra les deux points (x, y) et (x_0, y_0), parce que les deux égalités

$$x f'_x + y f'_y + f'_z = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$$

seront satisfaites, comme étant les deux équations mêmes du problème. D'un autre côté, le point réel (x_0, y_0) sera le centre du faisceau

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0;$$

par conséquent, toutes les droites du faisceau y passeront. La droite du faisceau qui aurait pour caractéristique celle $\frac{\beta'}{\beta}$ de la solution obtenue joindra donc effectivement le point (x_0, y_0) au point (x, y); mais les deux lieux

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0$$

contiendront les mêmes éléments autour du point représentatif de la solution $(X = x, Y = y)$. Donc, enfin, la droite de caractéristique $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du faisceau $X f''_x + Y f''_y + f''_z = 0$ sera bien l'une des tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conjuguée C du lieu $f(X, Y) = 0$. Comme on aura obtenu deux solutions conjuguées, on connaîtra deux tangentes menées du même point (x_0, y_0) à la même conjuguée du lieu proposé. La caractéristique C de cette conjuguée dépendra de la situation du point (x_0, y_0).

Si les deux équations

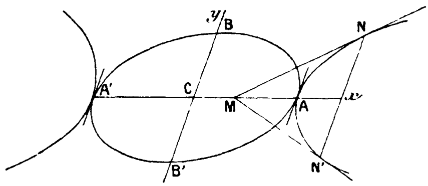
$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$$

avaient d'autres solutions imaginaires, il y correspondrait généralement des tangentes à d'autres conjuguées.

Si, en particulier, $-\frac{f'_x}{f'_y}$ était réel en l'un des points imaginaires de contact et en son conjugué, ces deux points appartiendraient à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, et l'on se trouverait avoir mené du point (x_0, y_0) deux tangentes à cette enveloppe.

Supposons qu'il s'agisse d'une ellipse réelle ABA'B' (*fig.* 5), et soit M le point donné (x_0, y_0), on sait que la polaire de ce point est parallèle au diamètre conjugué de OM et qu'elle est réelle; elle ne peut donc couper le lieu qu'en deux points de la conjuguée dont les cordes réelles lui sont parallèles, c'est-à-dire de la conjuguée qui touche l'ellipse aux extrémités A et A′ du diamètre OM. Soit NN′ cette polaire; les points de contact cherchés seront N et N′, et les tangentes cherchées seront MN et MN′.

Fig. 5.



Supposons en particulier que le point donné soit l'un des foyers réels de l'ellipse et que cette courbe soit rapportée à ses axes : la polaire du point $y=0$, $x=c$ sera $x=\frac{a^2}{c}$, elle coupera l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ aux points

$$x=\frac{a^2}{c},\qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{-\frac{a^2b^2}{c^2}}=\pm\frac{b^2}{c}\sqrt{-1};$$

les tangentes menées au lieu en ces deux points sont les conjuguées à abscisses réelles des deux faisceaux

$$\frac{X}{c}\pm\frac{Y}{c}\sqrt{-1}-1=0$$

ou

$$Y=\mp\sqrt{-1}\,X\pm c\sqrt{-1}.$$

Ces tangentes ont donc pour équations en coordonnées réelles

$$Y=\mp X\pm c,$$

elles sont rectangulaires entre elles et elles passent géométriquement par les foyers imaginaires de l'ellipse

$$x=0\qquad\text{et}\qquad y=\pm c;$$

d'ailleurs leurs équations en coordonnées imaginaires sont satisfaites par $x = 0$ avec $y = \pm c\sqrt{-1}$. C'est pour cela que le calcul donne les deux foyers imaginaires.

Les quatre tangentes menées à l'ellipse des deux foyers réels F et F′ forment un carré dont les autres sommets sont les foyers imaginaires φ et φ'. Les tangentes menées des points φ et φ' considérés comme imaginaires coïncideraient avec les tangentes menées des points F et F′ réels.

Le carré $F'\varphi F\varphi'$ est géométriquement et analytiquement inscrit à la conique.

Si l'on rapportait l'ellipse à deux de ses diamètres conjugués a' et b' et que, en supposant $a' > b'$, on prît sur le diamètre a' le point situé à une distance du centre égale à $c' = \sqrt{a'^2 - b'^2}$, on arriverait à des conclusions analogues; seulement, au lieu d'un carré inscrit dans la conique, on trouverait un parallélogramme ayant ses diagonales égales; les quatre sommets seraient des simili-foyers.

Lorsqu'on ferait varier le système des diamètres conjugués, les quatre simili-foyers décriraient un lieu sur lequel ils se réuniraient à l'origine lorsque les diamètres conjugués viendraient se confondre avec ceux qui sont égaux; à ce moment, les quatre tangentes deviendraient géométriquement indéterminées; elles seraient bien représentées, par rapport aux axes, par exemple, par l'équation complètement déterminée

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x,$$

mais toutes les conjuguées de ce lieu répondraient à la question, parce qu'elles contiendraient toutes le point donné (x_0, y_0), transporté à l'origine. L'ensemble de ces conjuguées serait constitué par l'ensemble des asymptotes de toutes les hyperboles conjuguées de l'ellipse.

Nous verrons bientôt qu'il en est de même pour tous les lieux algébriques : si, en cherchant les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on en a trouvé une imaginaire

$$y = (m + x\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

en réalité, on a trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées du lieu proposé.

Si le point (x_0, y_0), par lequel on voulait mener des tangentes à un lieu $f(x, y) = 0$, était imaginaire, les $m(m-1)$ tangentes trouvées appartiendraient à des conjuguées non désignées d'avance et d'ailleurs ne passeraient généralement plus par le point (x_0, y_0) réalisé. Ce cas ne présente aucun intérêt pratique.

7. *Quelques propriétés de l'enveloppe imaginaire.* — Si l'on propose de mener à un lieu de degré m, $f(x, y) = 0$, des tangentes parallèles à une direction réelle donnée, $y = kx$, les points de contact appartiendront soit à la courbe réelle, soit à l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Le nombre total de ces tangentes sera $m(m-1)$, puisque les équations du problème seront

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{f'_x}{f'_y} = k.$$

Il en résulte que, si l'une des enveloppes n'a que p tangentes parallèles à une direction donnée, l'autre en a $m(m-1) - p$. A ce point de vue, *les deux enveloppes sont supplémentaires.*

Si $y = mX + \varphi(m)$ est l'équation générale des tangentes à la courbe réelle représentée par une équation, $f(X, Y) = 0$, $Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$

sera évidemment l'équation générale des tangentes à toutes les conjuguées. La solution double commune aux deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

représentera le point de contact et si, dans cette solution double, on a $\frac{\beta'}{\beta} = C$, la conjuguée C du faisceau

$$Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

sera tangente au point en question à la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$.

Aux valeurs réelles de m, pour lesquelles $\varphi(m)$ serait imaginaire, correspondront des tangentes à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$.

Si $\varphi(m)$ peut devenir imaginaire, deux de ses valeurs deviendront momentanément égales et le point de contact des deux tangentes confondues sera alors un point d'inflexion du lieu réel.

Ces deux valeurs de $\varphi(m)$ pourront, avant d'être devenues égales, être représentées par

$$\psi(x) \pm \sqrt{\chi(m)},$$

$\chi(m)$ étant alors positif; aussitôt après, elles deviendront

$$\psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1}.$$

$-\chi(m)$ étant alors positif.

Les deux tangentes au lieu réel seront représentées par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)};$$

quant aux deux tangentes à l'enveloppe imaginaire, elles le seront par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1}.$$

Mais cette dernière opération ne représente que la seule droite

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il résulte de là que les deux enveloppes d'un même lieu sont respectivement les enveloppes de droites représentées, pour l'une, par une équation telle que

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)}$$

et, pour l'autre, par l'équation correspondante

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il en résulte que *les deux enveloppes d'un même lieu sont toujours réciproques l'une de l'autre,* lorsqu'elles coexistent.

Au moment où $\chi(m)$ s'annule, le point de contact appartient à la fois aux deux enveloppes et est point d'inflexion pour l'une et pour l'autre, puisque les deux tangentes, à ce moment confondues, à l'une ou à l'autre deviennent instantanément imaginaires pour l'une ou l'autre suivant qu'on fait varier m dans un sens ou dans l'autre, à partir de sa valeur singulière. Il en résulte que les *deux enveloppes ont toujours les mêmes points d'inflexion, qu'elles se touchent en ces points et qu'elles s'y tournent leurs convexités.*

Une asymptote réelle

$$y = mx + \varphi(m)$$

d'un lieu réel est toujours la réunion de deux tangentes à deux branches distinctes du lieu. Lorsque cette asymptote ne coupe le lieu qu'en deux points situés à l'infini, sa direction est généralement une direction limite pour les tangentes au lieu. Si l'on essayait de faire varier dans un sens convenable la direction de la tangente, à partir de celle de l'asymptote, les deux tangentes, un instant confondues, deviendraient imaginaires et, leur coefficient angulaire étant resté réel, les points de contact appartiendraient à l'enveloppe imaginaire.

Il en résulte que les *deux enveloppes ont généralement les mêmes asymptotes*. (*A suivre.*)