

ISSALY

**Extension aux pseudo-surfaces du
théorème de Malus relatif à la marche
des rayons lumineux**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 190-193

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__190_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

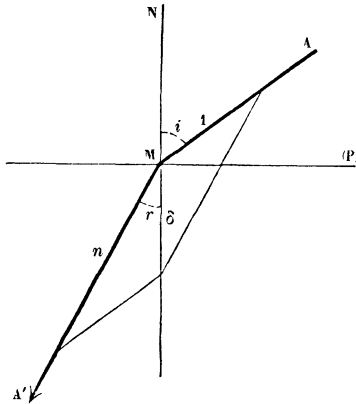
**EXTENSION AUX PSEUDO-SURFACES DU THÉORÈME DE MALUS
RELATIF A LA MARCHÉ DES RAYONS LUMINEUX;**

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

THÉORÈME. — *Si des rayons lumineux sont normaux à une pseudo-surface, ils jouissent encore de la même propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.*

Il suffit d'établir le théorème pour le cas de la réfraction, celui de la réflexion pouvant être considéré comme correspondant à une réfraction d'indice $n = -1$.

Nous suivrons, en cela, la même méthode que M. Darboux, pour le cas des surfaces (*Leçons sur les surfaces*, n° 450).



Soit (F_v) une pseudo-surface quelconque tangente en M au plan (P) et que nous envisageons, même $ph\gamma$

siquement (nos recherches antérieures sur la surface de l'onde nous y autorisent, croyons-nous), comme la limite de séparation de deux milieux. Soient MN la normale au plan (P), et (S), (S') les deux courbes génératrices de (F_v), respectivement tangentes aux axes Mx, My situés dans ce plan. Associés à la normale MN, ces axes constituent le trièdre mobile MNxy, auquel nous supposerons la surface (F_v) médiatement rapportée.

Choisissons comme trièdre de référence un trièdre *trirectangle* quelconque OXYZ ou (T) et désignons par (α, β, γ), (α', β', γ'), (α_v, β_v, γ_v) les cosinus directeurs, par rapport à ce trièdre, des rayons, incident et réfléchi, MA, MA' et de la normale MN.

Pour que la loi de Descartes, $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, soit vérifiée, il faut et il suffit que la diagonale δ du parallélogramme construit sur les longueurs 1 et n, respectivement portées sur MA et MA', coïncide avec le prolongement de MN.

Cela étant, si l'on projette sur les arêtes du trièdre (T) les trois longueurs précédentes, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha + n\alpha' = \delta\alpha_v, \\ \beta + n\beta' = \delta\beta_v, \\ \gamma + n\gamma' = \delta\gamma_v. \end{cases}$$

Or, pour tout déplacement sur la pseudo-surface (F_v) du pied de la normale MN, on a la relation évidente

$$(2) \quad \alpha_v dX + \beta_v dY + \gamma_v dZ = 0,$$

en même temps que les conditions

$$\begin{aligned} dX &= a ds + a' ds', \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &< \frac{\partial a}{\partial s'}, \end{aligned}$$

propres à caractériser la pseudo-surface (F_v) et dans lesquelles $(a, b, c), (a', b', c')$ désignent les cosinus directeurs de Mx et de $M\gamma$.

Substituant les valeurs (1) dans la relation (2), il vient

$$(3) \quad (\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ) + n(x' dX + \beta' dY + \gamma' dZ) = 0.$$

Ceci posé, prenons deux points (correspondants) fixes M_1 et M'_1 , le premier, sur MA , à la distance ρ , le deuxième, sur MA' , à la distance $-\frac{\rho}{n}$ du point M . Les coordonnées de ces points pourront être représentées par les systèmes

$$(M_1) \quad \begin{cases} X_1 = X - \rho\alpha, \\ Y_1 = Y - \rho\beta, \\ Z_1 = Z - \rho\gamma; \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} X'_1 = X + \frac{\rho}{n} \alpha', \\ Y'_1 = Y + \frac{\rho}{n} \beta', \\ Z'_1 = Z + \frac{\rho}{n} \gamma'. \end{cases}$$

Si maintenant on admet que le rayon incident MA soit normal en M_1 à une pseudo-surface déterminée (F_{v_1}) , on aura, pour tout déplacement infinitésimal de M_1 sur (F_{v_1}) ,

$$(4) \quad \alpha dX_1 + \beta dY_1 + \gamma dZ_1 = 0,$$

et comme

$$dX_1 = dX - \alpha d\rho - \rho d\alpha, \\ \dots\dots\dots$$

il s'ensuit que

$$(5) \quad \alpha dX + \beta dY + \gamma dZ = d\rho.$$

Remontant à l'équation (3), on en tire

$$(6) \quad \alpha' dX + \beta' dY + \gamma' dZ = -d\left(\frac{\rho}{n}\right).$$

D'autre part, des coordonnées du point M'_1 on déduit

$$dX'_1 = dX + \alpha' d\left(\frac{\rho}{n}\right) + \frac{\rho}{n} d\alpha',$$

.....

système de valeurs qui, eu égard à (6), entraîne comme conséquence

$$(7) \quad \alpha' dX'_1 + \beta' dY'_1 + \gamma' dZ'_1 = 0.$$

En rapprochant cette dernière relation des relations analogues (2) et (4), on voit qu'elle exprime que le rayon réfracté MA' est normal en M'_1 à une nouvelle pseudo-surface $(F_{v'_1})$, pseudo-surface, d'ailleurs, parfaitement déterminée, elle aussi, puisque, à chaque point $M_1 (F_{v_1})$, correspond un point unique M'_1 de $(F_{v'_1})$. Le théorème généralisé que nous avons en vue se trouve donc par là-même établi.
