Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur les périodes des intégrales elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 193-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__193_1>

SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. V. JAMET.

On connaît la relation

$$\omega\omega'_1 - \omega_1\omega' = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{k^2}$$

qui existe entre les périodes 2ω, ω' et $2\omega_1$, ω'_1 des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, au module k. Cette relation tire son origine de considérations purement analytiques; mais il n'est pas sans intérêt de constater qu'on la rencontre quand on veut évaluer le volume de l'ellipsoïde au moyen des coordonnées elliptiques.

Voyons d'abord comment, au moyen de ces coordonnées, l'expression de ce volume va se réduire à une intégrale double.

Soit

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde, où l'on suppose $a > b > c > 0$.

On peut exprimer les coordonnées d'un point (x, y, z) de cette surface par les formules suivantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 &= \frac{b(b+\mu)(b+\nu)}{(b-a)(b-c)}, \\ z^2 &= \frac{c(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \right.$$

et l'on obtiendra tous les points possibles de cette surface en faisant varier μ, par exemple, entre $-a$ et $-b$, ν entre $-b$ et $-c$. Ceci résulte du mode de séparation, bien connu, des racines de l'équation du troisième degré en ρ

$$\frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} = 1.$$

L'expression d'un élément de surface de l'ellipsoïde est le produit des différentielles des arcs des deux lignes de, courbure, qu'on obtient, l'une en faisant varier μ et laissant ν invariable, l'autre, au contraire, en supposant ν variable et μ constante. Soit $d\sigma$ cet élément. On trouve

$$\sqrt{-1}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\mu\nu}(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{4\sqrt{f(\mu)f(\nu)}},$$

en posant

$$f(\rho)=(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c).$$

On calculera le volume infiniment petit du cône qui a pour directrice le contour de $d\sigma$ et pour sommet le centre de la sphère, en multipliant l'expression de $d\sigma$ par le tiers de la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde au point (μ, ν). Soit p cette distance. On a

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}},$$

x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes du point de contact. Mais, à cause des formules (1),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{\mu\nu}{abc}.$$

Donc l'élément de volume d'un ellipsoïde a pour mesure

$$-\frac{\sqrt{-1}}{12}\,\frac{(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}.$$

Mais, à chaque système de valeurs de μ, ν correspondent huit points de l'ellipsoïde; donc son volume total est égal à

$$-\frac{2\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\int_{-a}^{-b}\int_{-b}^{-c}\frac{(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}.$$

Posons maintenant

$$\mu = -b\,\mathrm{sn}^2\varphi - c\,\mathrm{cn}^2\varphi = -c-(b-c)\,\mathrm{sn}^2\varphi,$$
$$\nu = -c-(b-c)\,\mathrm{sn}^2\psi,$$

le module k^2 des fonctions elliptiques employées étant égal à $\frac{b-c}{a-c}$; et cherchons les valeurs φ_0, φ_1 de l'argument φ qui correspondent à $\mu = -a$, $\mu = -b$, et les valeurs ψ_0, ψ_1 de ψ qui répondent à $\nu = -a$, $\nu = -b$. Nous trouverons

$$\mathrm{dn}^2\varphi_0 = 0, \qquad \mathrm{cn}^2\psi_1 = 0,$$

et nous pourrons supposer

$$\varphi_0 = \frac{\omega + \omega_1}{2}, \qquad \varphi_1 = \frac{\omega}{2}.$$

De même

$$\mathrm{cn}^2\psi_0 = 0, \qquad \mathrm{sn}^2\psi_1 = 0,$$

et nous pourrons faire

$$\psi_1 = \frac{\omega}{2}, \qquad \psi_0 = 0.$$

Alors l'expression du volume se transformera comme il suit :

$$+\frac{8\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\int_{\frac{\omega}{2}}^{0}(\mathrm{sn}^2\varphi - \mathrm{sn}^2\psi)\,d\varphi\,d\psi$$

$$= -\frac{8\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2\left\{\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}} d\varphi\int_{\frac{\omega}{2}}^{0}\mathrm{sn}^2\psi\,d\right.$$

$$\left. -\int_{\frac{\omega}{2}}^{0} d\psi\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\mathrm{sn}^2\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$= -\frac{2\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2(\omega_1\omega' - \omega\omega'_1).$$

Comparant cette expression avec l'expression connue, $\frac{4}{3}\pi\sqrt{abc}$, on trouve la formule qu'il s'agissait d'établir

$$\omega_1\omega' - \omega\omega'_1 = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{k^2}.$$