Nouvelles annales de mathématiques

E. Grossetête

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 208-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__208_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

PAR M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

et h_1, k_1 les invariants de l'équation (E_1) obtenue en appliquant la méthode de Laplace.

Trouver les formes que doivent avoir les invariants

h et k pour que l'on ait les deux relations

$$h_1 = lh, \qquad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E).

I. On sait [1] que, si l'on désigne par h_1 et k_1 les invariants de l'équation (E_1), on a

$$h_1 = 2h - k - \frac{d^2 \log h}{dx\,dy},$$
$$k_1 = h.$$

Or ici $h_1 = lh$, $k_1 = mk$; on conclut que l'équation donnant h est

$$h\left(l + \frac{1}{m} - 2\right) = \frac{d^2 \log h}{dx\,dy}.$$

Si l'on pose $l + \frac{1}{m} - 2 = p$, il faudra intégrer l'équation

$$\frac{d^2 \log h}{dx\,dy} = ph, \tag{1}$$

dans laquelle p est constant.

Pour cela, posons

$$\log h = 2z, \qquad \text{où} \qquad e^{2z} = h.$$

(1) devient

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = pe^{2z}.$$

C'est une équation de Liouville; pour l'intégrer, nous poserons

$$\frac{dz}{dy} = Q,$$

---

[1] Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 28. Paris, Gauthier-Villars et fils.

d'où

$$\frac{dQ}{dx} = pe^{2z},$$

et, en prenant la dérivée par rapport à y,

$$\frac{d^2Q}{dx\,dy} = \frac{dQ}{dx} 2Q,$$

par suite

$$\frac{dQ}{dy} - Q^2 = F(y).$$

Soit $\psi(y) = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(y)}$ une solution particulière de cette équation.

Pour avoir la solution générale, posons

$$Q = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(y)} + u,$$

u étant une nouvelle variable; il viendra

$$\frac{du}{dy} - u\frac{f''(y)}{f'(y)} - u^2 = 0,$$

d'où, après avoir multiplié par $\frac{-f'(y)}{u^2}$,

$$\frac{d}{dy}\frac{f'(y)}{u} + f'(y) = 0.$$

Intégrant par rapport à y, il vient

$$\frac{f'(y)}{u} + f(y) + \varphi(x) = 0,$$

d'où

$$u = \frac{-f'(y)}{f(y)+\varphi(x)},$$

$$Q = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(y)} - \frac{f'(y)}{f(y)+\varphi(x)},$$

enfin

$$pe^{2z} = \frac{dQ}{dx} = \frac{f'(y)\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2};$$

donc

$$h = \frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{p[f(y)+\varphi(x)]^2} = \frac{m}{l-2m+1}\,\frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2},$$

$$k = \frac{1}{pm}\,\frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2} = \frac{m}{l-2m+1}\,\frac{f'(y)^2\,\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2}.$$

II. Pour déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E), nous calculerons les coefficients a', b', c' de l'équation réduite

$$\text{(E')} \qquad \frac{d^2 z'}{dx\,dy} + a'\,\frac{dz'}{dx} + b'\,\frac{dz'}{dy} + c' = 0,$$

qui a les mêmes invariants que la proposée et qui est telle que $a'b' - c' = 0$. Dans ce cas, on peut déterminer a', b', c' par les formules

$$a' = \int_{x_0}^{x} h\,dx, \qquad b' = \int_{y_0}^{y} k\,dy, \qquad c' = a'b',$$

$$a' = \int_{x_0}^{x} \frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{p[f(y)+\varphi(x)]^2}\,dx = \frac{f'(y)[\varphi(x)-\varphi(x_0)]}{p[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]}$$
$$= \frac{mf'(y)}{l-2m+1}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]},$$

$$b' = \int_{y_0}^{y} \frac{\varphi'(x)\,f'(y)}{pm[f(y)+\varphi(x)]^2}\,dy = \frac{\varphi'(x)}{pm}\,\frac{f(y)-f(y_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]}$$
$$= \frac{\varphi'(x)}{l-2m+1}\,\frac{f(y)-f(y_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y_0)+\varphi(x)]},$$

$$c' = \frac{m\varphi'(x)f'(y)}{(l-2m+1)^2}\,\frac{[f(x')-\varphi(x_0)][f(y)-f(y_0)]}{[f(y)+\varphi(x)]^2[f(y)+\varphi(x_0)][f(y_0)+\varphi(x)]}.$$

En faisant sur (E') une substitution de la forme

$$z' = \lambda z,$$

dans laquelle λ désigne une fonction quelconque de x et y, on obtiendra une équation (E) répondant à la question. Les valeurs de a, b, c sont alors données par les formules

$$a = a' + \frac{d \log \lambda}{dy},$$

$$b = b' + \frac{d \log \lambda}{dx},$$

$$c = c' + a \frac{d \log \lambda}{dx} + b \frac{d \log \lambda}{dy} + \frac{l}{\lambda} \frac{d^2 \lambda}{dx\, dy}.$$