NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARISIEN

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1889. Solution de la question d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 212-215
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__212_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1889.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE;

PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

Déterminer un polynôme entier en x du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $f(x+1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$?

D'après l'énoncé, il faut que l'on ait

$$\frac{f(x)+1}{(x-1)^4} = \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D},$$

$$\frac{f(x)-1}{(x+1)^4} = \mathrm{A}'x^3 + \mathrm{B}'x^2 + \mathrm{C}'x + \mathrm{D}',$$

avec

$$f(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h.$$

En remarquant, de suite, que $\mathrm{A} = \mathrm{A}' = a$, il faut identifier les termes des deux équations

$$\begin{aligned} &ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h - 1 \\ &\quad = (x-1)^4(ax^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}), \\ &ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h - 1 \\ &\quad = (x+1)^4(ax^3 + \mathrm{B}'x^2 + \mathrm{C}'x + \mathrm{D}'). \end{aligned}$$

On obtient de la sorte le système d'équations

$$
\begin{aligned}
B - 4a &= b, & B' + 4a &= b,\\
C - 4B + 6a &= c, & C' + 4B' + 6a &= c,\\
D - 4C + 6B - 4a &= d, & D' + 4C' + 6B' + 4a &= d,\\
-4D + 6C - 4B + a &= e, & 4D' + C' + 4B' + a &= e,\\
6D - 4C + B &= f, & 6D' + 4C' + B' &= f,\\
C - 4D &= g, & C' + 4D' &= g,\\
D &= h + 1; & D' &= h - 1.
\end{aligned}
$$

On a ainsi quatorze équations du premier degré entre quatorze inconnues a, b, c, d, e, f, g, h, B, C, D, B', C', D'. En éliminant les majuscules dans chacun des deux groupes, on obtient les huit équations

$$
\begin{aligned}
&(1) & -35a - 20b - 10c - 4d &= e,\\
&(2) & 84a + 45b + 20c + 6d &= f,\\
&(3) & 20a + 10b + 4c + d &= h + 1,\\
&(4) & -70a - 36b - 15c - 4d &= g;\\
&(5) & -35a + 20b - 10c + 4d &= e,\\
&(6) & -84a + 45b - 20c + 6d &= f,\\
&(7) & -20a + 10b - 4c + d &= h - 1,\\
&(8) & -70a + 36b - 15c + 4d &= g.
\end{aligned}
$$

Ajoutons et retranchons les équations telles que (1) et (5), nous aurons le système suivant

$$
\begin{aligned}
35a + 10c + e &= 0, & 5b + d &= 0;\\
45b + 6d - f &= 0, & 21a + 5c &= 0;\\
10b + d - h &= 0, & 20a + 4c - 1 &= 0;\\
70a + 15c + g &= 0, & 9b + d &= 0;
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$
b = 0, \qquad d = 0, \qquad f = 0, \qquad h = 0,
$$

$$
a = +\frac{5}{16}, \qquad c = -\frac{21}{16}, \qquad e = \frac{35}{16}, \qquad g = -\frac{35}{16}.
$$

On a donc pour le polynôme demandé

$$f(x) = \frac{5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x}{16}$$
$$= \frac{x}{16}(5x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 35).$$

En posant $x^2 = z$, la quantité entre parenthèses devient

$$(5z^3 - 21z^2 - 35z - 35)$$

et ne s'annule que pour la valeur positive $z = 2,526, \ldots$: les deux autres racines en z sont imaginaires.

Donc, en définitive, l'équation du septième degré en x, $f(x)$ a une racine nulle, deux racines égales et de signe contraire, $\pm 0,0159$ et quatre racines imaginaires.

N. B. — Voici, sans sortir du domaine de l'Algèbre élémentaire, une solution plus simple.

Les expressions

$$(1) \qquad \frac{f(x) - 1}{(x-1)^4}, \qquad \frac{f(x) + 1}{(x+1)^4}$$

étant, par hypothèse, des polynômes entiers du troisième degré par rapport à x, il en est de même des expressions

$$\frac{f(x) + f(-x)}{(x-1)^4}, \qquad \frac{f(x) + f(-x)}{(x+1)^4},$$

que l'on obtient en ajoutant à chacune des quantités (1) l'autre dans laquelle on a préalablement changé x en $-x$. Le polynôme $f(x) + f(-x)$, qui est du sixième degré au plus, devant d'après cela être divisible par $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$, est identiquement nul; en d'autres termes, $f(x)$ ne saurait renfermer aucun terme de degré pair, et l'on a

$$\lambda f(x) = x^7 + px^5 + qx^3 + rx.$$

En divisant alors $\lambda[f(x) - 1]$ par $(x-1)^4$ et observant que le dernier terme de ce quotient doit être égal à $-\lambda$, on trouve

$$f(x) = 1 + \frac{(x+1)^4}{\lambda}\left[x^3 - 4x^2 + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)x - \lambda\right],$$

où il faut faire λ égal à $\frac{16}{5}$ pour que la condition $f(1) + 1 = 0$ soit satisfaite.

Mais la solution la plus élégante est sans contredit la suivante, qui repose sur l'emploi des dérivées et qui m'a été communiquée par M. Brisse :

$f(x) + 1$ étant divisible par $(x-1)^4$ et $f(x) - 1$ par $(x+1)^4$, leur dérivée commune $f'(x)$ est divisible par $(x-1)^3(x+1)^3$, puisque $x - 1$ et $x + 1$ sont premiers entre eux, et l'on a

$$f'(x) = \lambda(x^2 - 1)^3,$$

λ étant une constante, puisque $f'(x)$ est du sixième degré; d'où

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) + \mu.$$

On détermine λ et μ par les équations $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. D'après l'expression de $f'(x)$ et les signes de $f(1)$ et $f(-1)$, les racines sont séparées. E. R.
