NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Théorie des déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__219_0>

THÉORIE DES DÉTERMINANTS;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. INTRODUCTION. — M. F. Caspary, dans un très intéressant Mémoire ([1]), a exposé une méthode à la fois synthétique et analytique pour l'étude de la Géométrie. Les principes en sont dus aux génies de Cauchy ([2]) et de Grassmann ([3]). L'auteur indique qu'ils se prêtent à une théorie simplifiée des déterminants, mais il n'en dit rien de plus. De son côté, Grassmann, dans son remarquable Ouvrage *Die Ausdehnungslehre*, néglige cette théorie, quoique son exposition eût à gagner par une étude préalable des déterminants. Je serai heureux si, comme je pense, l'exposition suivante est jugée plus facile que les méthodes adoptées. Elle présente certainement l'avantage de faire ressortir le caractère de produit que possède un déterminant et qui est, en général, méconnu. Enfin elle prépare à ces méthodes puissantes de Cauchy, Grassmann, Hamilton, dont MM. F. Caspary, Laisant, Tait, ont fait d'intéressantes applications, mais qui n'ont pas encore, dans la Science et surtout dans l'enseignement, la place qu'elles méritent. Faciliter le présent et préparer l'avenir, tel est mon but.

2. DÉFINITIONS. — Le dénominateur commun des

([1]) *Bulletin des Sciences mathematiques,* 2e série, t. XIII; sept. 1889.

([2]) *Comptes rendus*, t. XXXVI et XLII : *Exercices d'Analyse et de Physique mathematique,* t. III et IV.

([3]) *Die Ausdehnungslehre.* Berlin, 1844 et 1862.

valeurs des inconnues x et y tirées des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} c = ax + by, \\ c' = a'x + b'y \end{cases}$$

est $ab' - ba'$; il est *déterminé* quand on donne le Tableau des coefficients $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. De là le nom de *déterminant* donné à ce Tableau. Le nombre $ab' - ab'$ est la *valeur de ce déterminant* ([1]). On l'obtient commodément par une sorte de multiplication. Multiplions, en effet, membre à membre la première équation (1) par la deuxième, *en respectant l'ordre des facteurs*. Il vient

$$(2) \qquad cc' = aa'xx + ab'xy + ba'yx + bb'yy.$$

Si maintenant on cesse de regarder x et y comme des nombres pour en faire de purs symboles dénués de toute signification, et que Grassmann appelle *unités* ([2]), il suffit de faire sur ces unités la convention générale unique

$$xy = -yx$$

et, conséquemment,

$$xx = 0, \qquad yy = 0.$$

Le coefficient de xy, dans le développement (2), est alors la valeur $ab' - ba'$ du déterminant.

Multiplication extérieure. — Cette convention générale unique que *le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs* suffit

---

([1]) Cette distinction entre le déterminant et sa valeur peut paraître subtile; elle s'impose dans certaines questions.

([2]) Cauchy emploie, pour désigner ces symboles, le nom de *clefs anastrophiques;* voir le *Mémoire sur les clefs algébriques* dans le Tome IV des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, p. 356. E. R.

pour engendrer les déterminants par voie de multiplication. Cette sorte de multiplication qui en résulte, Grassmann l'appelle *multiplication extérieure* et la représente par des crochets pour la distinguer de la multiplication usuelle ou *algébrique*. Enfin, pour éviter toute confusion, au lieu d'employer la notation ci-dessus, je désignerai les *unités* par la lettre x affectée d'indices, les fonctions linéaires de ces unités par la lettre y; les nombres, *éléments des déterminants,* seront désignés par les lettres $a, b, c, \ldots$. Ainsi le produit extérieur des quantités $y = ax_1 + bx_2$, $y' = a'x_1 + b'x_2$ qui définit le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ sera

$$[yy'] = [(ax_1 + bx_2)(a'x_1 + b'x_2)] = (ab' - ba')[x_1x_2].$$

De la définition résultent immédiatement les propriétés suivantes pour les produits extérieurs qu'on peut former avec n unités $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1° *Dans ces produits, les facteurs peuvent être ordonnés dans tel ordre que l'on veut par des échanges successifs de facteurs consécutifs, chaque échange étant accompagné d'un changement de signe.*

2° *Ceux qui contiennent plus d'une fois un même facteur sont nuls.*

3° *Quand on intervertit deux facteurs quelconques non consécutifs, le produit change de signe;* en effet, pour passer de $[\ldots x_p \ldots x_q \ldots]$ à $[\ldots x_q \ldots x_p \ldots]$, on peut échanger x_p successivement avec les k facteurs qui le séparent de x_q, puis échanger x_p et x_q, enfin échanger x_q avec les k facteurs qui le séparaient d'abord de x_p. Le nombre $2k+1$ de ces échanges successifs étant impair, le produit a finalement changé de signe.

Déterminants. — 1° *Étant donné n fonctions linéaires homogènes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n lettres x_1,*

$x_2, \ldots, x_n$, *on appelle déterminant de ces fonctions le tableau carré des n^2 coefficients.*

2° *La valeur du déterminant est le coefficient de* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *dans le produit extérieur* $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Si l'on appelle D cette valeur, on aura

$$[y_1 y_2 \ldots y_n] = \mathrm{D}[x_1 x_2 \ldots x_n],$$

ce qui conduit à la notation fort commode

$$\mathrm{D} = \frac{[y_1 y_2 \ldots y_n]}{[x_1 x_2 \ldots x_n]},$$

qui est celle des déterminants fonctionnels ([1]).

3. Théorème. — *Un déterminant change de signe quand on échange deux lignes entre elles.*

Il s'agit de prouver que si, dans le produit $[y_1 y_2 \ldots y_n]$, on intervertit deux facteurs y quelconques, le produit change de signe et pour cela il suffit de démontrer que, pour deux facteurs consécutifs quelconques y_p et y_q, on a

$$(1) \qquad [y_p y_q] = -[y_q y_p].$$

Or un terme quelconque du premier produit se trouve dans le second avec cette seule différence que les lettres x qui s'y trouvent ont échangé leurs places. L'égalité (1) est donc démontrée et le théorème en résulte (comme au n° 2).

Corollaires. — 1° *Cette règle générale qui a servi*

([1]) Cette définition établit une différence entre les lignes et les colonnes d'un déterminant. Cela me paraît essentiel. Quand on échange les lignes avec les colonnes, le *determinant* lui-même change. Sa *valeur* reste la même, il est vrai; mais c'est là un théorème et il n'y a pas lieu de renfermer ce théorème dans la définition en s'efforçant de rendre celle-ci symétrique par rapport aux lignes et aux colonnes.

de définition à la multiplication extérieure (à savoir que le produit de deux unités change de signe quand on permute les deux facteurs) *s'étend à des fonctions linéaires quelconques de ces unités.*

2° *Si, dans un déterminant, on échange les lignes avec les colonnes, sa valeur ne change pas.* En effet, de la définition (n° 2) et du théorème (n° 3), il résulte que les valeurs de deux déterminants sont formées des mêmes termes munis des mêmes signes.

3° *Tout théorème relatif aux lignes s'applique également aux colonnes, et réciproquement.*

4. Théorème. — *On a*

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

C'est ce qu'exprime la formule évidente

$$[(y+y')y_1y_2] = [yy_1y_2] + [y'y_1y_2].$$

5. *Développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne.*

Soit à développer suivant les éléments de la première ligne le déterminant défini par les formules

$$\begin{aligned} y &= ax_1 + bx_2 + cx_3, \\ y' &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3. \\ y'' &= a''x_1 + b''x_2 + c''x_3. \end{aligned}$$

On a

$$[y'y''] = [(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3)(a''x_1 + b''x_2 + c''x_3)].$$

Dans le développement de ce produit, le terme en $[x_2x_3]$, par exemple, provient de

$$(b'x_2 + c'x_3)(b''x_2 - c'x_3).$$

Le coefficient de ce terme est donc le déterminant $\frac{[y'y'']}{[x_2 x_3]}$ qu'on obtient en supprimant la ligne y et la colonne x_1 qui se croisent sur l'élément a. On a ainsi

$$[y'y''] = \frac{[y'y'']}{[x_2 x_3]}[x_2 x_3] + \frac{[y'y'']}{[x_1 x_3]}[x_1 x_3] + \frac{[y'y'']}{[x_1 x_2]}[x_1 x_2].$$

Je multiplie *en avant* le premier membre par y, le second par l'expression égale $ax_1 + bx_2 + cx_3$, et je développe le second membre en tenant compte des égalités de définition de la multiplication extérieure. Il vient

$$[yy'y''] = a\frac{[y'y'']}{[x_2 x_3]}[x_1 x_2 x_3]$$
$$+ b\frac{[y'y'']}{[x_1 x_3]}[x_2 x_1 x_3] + c\frac{[y'y'']}{[x_1 x_2]}[x_3 x_1 x_2],$$

d'où enfin

$$\frac{[yy'y'']}{[x_1 x_2 x_3]} = a\frac{[y'y'']}{[x_2 x_3]} - b\frac{[y'y'']}{[x_1 x_3]} + c\frac{[y'y'']}{[x_1 x_2]}.$$

C'est l'expression de la règle connue; $\frac{[y'y'']}{[x_2 x_3]}$ est le déterminant mineur de l'élément a.

On obtient une généralisation de ce théorème en séparant le produit

$$[y_1 y_2 \ldots y_p y_{p+1} \ldots y_n]$$

en deux autres,

$$[y_1 \ldots y_p], \quad [y_{p+1} \ldots y_n].$$

6. J'ai donné en substance la partie la plus élémentaire de la théorie des déterminants. C'est à dessein que j'ai négligé quelques détails auxquels on suppléera sans peine. La multiplication des déterminants se traite aussi d'une façon intuitive par la même méthode.