Nouvelles annales de mathématiques

Barisien

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1889)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 297-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__297_0>

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1889).

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

1° *Construire la courbe définie par l'équation*

$$y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}, \tag{1}$$

2° *Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des x et si l'on désigne par a l'abscisse de l'un des points d'intersection, les abscisses des cinq autres points d'intersection seront*

$$\frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad 1-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

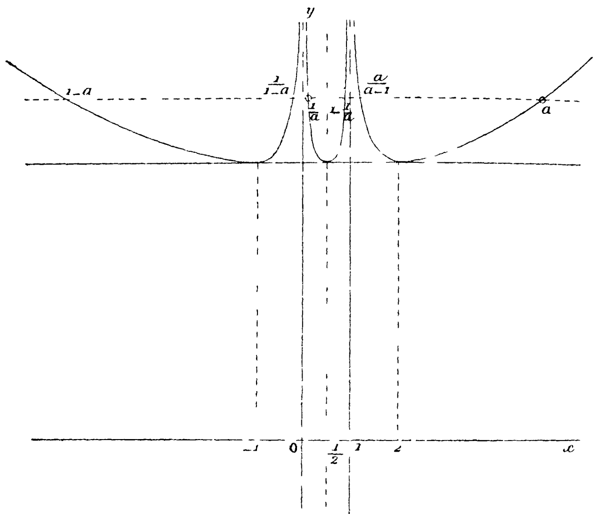
Distinguer sur la figure les points qui correspondent aux formules précédentes, en supposant que a soit la plus grande des abscisses des points d'intersection.

3° *La résolution de l'équation* (1), *où l'on regarde y comme un nombre donné et x comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré et d'une équation du second degré.*

4° *Lieu de la projection du point d'intersection des tangentes à la courbe* (1), *en des points dont les abscisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points.*

I. La courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$. Elle a pour asymptotes les droites $x = 0$ et $x = 1$ et deux branches paraboliques : elle est située tout entière au-dessus de la droite $y = \frac{27}{4}$ et a trois points de contact avec cette droite (*fig.* 1).

Fig. 1.



II. On remarque que la valeur y de (1) ne change pas lorsqu'on change x en $\frac{1}{x}$ ou en $1 - x$, ou en $1 - \frac{1}{x}$ et aussi en leurs inverses $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$; ce qui indique bien que, si l'une des abscisses d'intersection par une parallèle à l'axe des x est a, les autres sont

$$\frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Si a est la plus grande abscisse de ces points d'intersection, c'est forcément la valeur positive la plus grande. Donc $\frac{1}{a}$ est la plus petite valeur positive, $\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ est la deuxième valeur positive, $\frac{a}{a-1}$ la troisième. La plus grande valeur négative est $(1 - a)$ et la plus petite est $\frac{1}{1-a}$.

III. Ces abscisses d'intersection, étant deux à deux inverses l'une de l'autre, montrent que l'équation (1), du sixième degré en x, doit être réciproque.

En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad yx^2(x^2 - 1 - 2x) = [(x^2 + 1) - x]^3,$$

et si l'on pose

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

d'ou

$$(3) \qquad x^2 + 1 = zx,$$

en portant cette valeur de $(x^2 + 1)$ dans (2), on en déduit

$$(4) \qquad (z - 1)^3 - y(z - z) = 0.$$

On est donc ramené à la résolution de l'équation du troisième degré (4) et à celle du deuxième degré (3).

Un autre moyen d'arriver à ce résultat consiste à poser

$$(5) \qquad x(x - 1) = t;$$

(1) devient alors

$$(6) \qquad (t + 1)^3 - yt^2 = 0,$$

et l'on a à résoudre (6), puis (5).

On peut aussi poser

$$(7) \qquad x(x - 1) = \frac{1}{u}.$$

Il faut alors résoudre l'équation du troisième degré

$$(u - 1)^3 - uy = 0.$$

IV. D'après ce que nous avons vu précédemment, la droite joignant deux points tels que les abscisses soient réciproques ne peut être qu'une parallèle à l'axe des x.

Il suffit donc de chercher les tangentes relatives aux points ayant pour abscisses a et $\frac{1}{a}$.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (1) est

$$\frac{(2x-1)(x^2-x+1)^2(x-2)(x+1)}{x^3(x-1)^3}.$$

L'équation de la tangente au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \qquad y = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

est donc

$$(8)\quad \begin{cases} Y - \dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ \quad = \dfrac{(a^2-a+1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a^3(a-1)^3}(X-a). \end{cases}$$

Celle de la tangente au point ayant pour abscisse $\frac{1}{a}$ est

$$(9)\quad \begin{cases} Y - \dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ \quad = -\dfrac{(a^2-a+1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a(a-1)^3}\left(X-\dfrac{1}{a}\right). \end{cases}$$

En retranchant (8) et (9), on obtient

$$(10)\qquad X = \frac{2a}{a^2+1}.$$

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer a entre (10) et

$$(11)\qquad Y = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

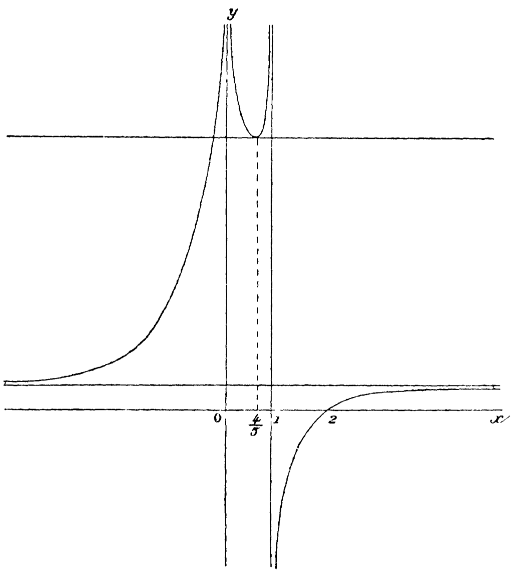
De (10), on tire

$$a^2 + 1 = \frac{2a}{X}.$$

En portant dans (11), il vient pour l'équation du lieu

$$Y = \frac{(X-2)^3}{2X^2(X-1)}.$$

Fig. 2.



C'est une courbe du quatrième degré ayant pour asymptotes les trois droites

$$X = 0, \qquad X = 1, \qquad Y = \tfrac{1}{2}.$$

Elle est dessinée sur la *fig.* 2.