

E. CARVALLO

Multiplication des déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 341-345

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__341_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS (1);

PAR M. E. CARVALLO,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. PROBLÈME. *Représenter le produit de deux déterminants d'ordres m et n par un déterminant d'ordre $m + n$.* — Considérons les déterminants des deux systèmes

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3, \\ y_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3, \\ y_3 = a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y_4 = a_4^1 x_4 + a_4^2 x_5, \\ y_5 = a_5^1 x_4 + a_5^2 x_5. \end{cases}$$

On a, d'après la définition que j'ai donnée des déterminants (1),

$$(1') \quad [y_1 y_2 y_3] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} [x_1 x_2 x_3],$$

$$(2') \quad [y_4 y_5] = \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_4 x_5],$$

et en opérant la *multiplication extérieure* sur les deux membres de ces égalités,

$$(3) \quad [y_1 y_2 y_3 y_4 y_5] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5].$$

Cette formule exprime que le produit des deux déterminants $\frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$, $\frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]}$, définis par les systèmes (1)

(1) Cet article fait suite à celui que j'ai publié récemment (*Nouv. Ann.*, 3^e série, t. X; mai 1891).

et (2), est égal au déterminant unique du cinquième ordre $\frac{[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]}{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]}$ qu'on obtient en regardant (1) et (2) comme formant un système unique de cinq fonctions y à cinq variables x .

Remarque. — Si dans les seconds membres du système (2), par exemple, on introduit des termes en x_1, x_2, x_3 , ceux-ci donneront dans la formule (2') de nouveaux termes en $[x_1, x_2], \dots$, etc.; mais, dans la multiplication de (1') et (2'), ces termes disparaîtront. La formule (3) subsiste. On peut donc, dans le déterminant $\frac{[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]}{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]}$ de cette formule, introduire des éléments arbitraires dans les colonnes 1, 2, 3 des lignes 4, 5 (1).

2. PROBLÈME. *Représenter le produit de deux déterminants de même ordre par un déterminant de même ordre.* — Soient A et B les valeurs des déterminants des deux systèmes

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3, \\ y_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3, \\ y_3 = a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} z_1 = b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3, \\ z_2 = b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3, \\ z_3 = b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3. \end{cases}$$

(1) L'expression du théorème avec ces éléments arbitraires λ et dans la notation usuelle est celle-ci :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & 0 & 0 \\ \lambda_4^1 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & a_4^1 & a_4^2 \\ \lambda_5^1 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & a_5^1 & a_5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4^1 & a_4^2 \\ a_5^1 & a_5^2 \end{vmatrix}.$$

On a, d'après ma définition des déterminants,

$$[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3] = A \cdot [x_1 x_2 x_3], \quad [z_1 z_2 z_3] = B \cdot [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3].$$

et par suite

$$(3) \quad [z_1 z_2 z_3] = B \cdot A \cdot [x_1 x_2 x_3].$$

Cette formule montre que le produit B.A est égal à la valeur C du déterminant obtenu en exprimant les z en fonction des x . Il suffit de remplacer, dans les formules (2), les γ par leurs valeurs (1). L'élément qui est à la ligne p et à la colonne q de ce nouveau déterminant C est visiblement le coefficient de x_q dans l'expression de z_p . C'est

$$(4) \quad c_p^q = b_p^1 a_1^q + b_p^2 a_2^q + b_p^3 a_3^q.$$

Remarques. — 1° La méthode s'étend au produit de plusieurs déterminants.

2° Elle ne suppose pas qu'on ait le même nombre de variables dans les formules (1) et (2). Si, par exemple, les formules (1) donnent seulement γ_1, γ_2 en fonction de x_1, x_2, x_3 ; si, de plus, les formules (2) donnent z_1, z_2, z_3 en fonction de γ_1, γ_2 , la méthode montre que le déterminant C est nul.

3° Le théorème s'exprime intuitivement par la formule $\frac{[z_1 z_2 z_3]}{[x_1 x_2 x_3]} = \frac{[z_1 z_2 z_3]}{[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3]} \frac{[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$. On reconnaît le théorème des fonctions de fonctions pour les dérivées et les déterminants fonctionnels.

3. DÉTERMINANTS RÉCIPROQUES. — Je suppose que dans le système (2) ($n^\circ 2$), b_p^q soit égal au déterminant mineur de l'élément a_p^q . Le déterminant B est alors appelé le *reciproque* du déterminant A (1). La formule (4) offre alors

(1) SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*.

deux cas. Si $q = p$, $c_p^p = b_p^1 a_1^p + b_p^2 a_2^p + b_p^3 a_3^p$ représente le développement du déterminant A suivant les éléments de la colonne p . Si q est différent de p , c_p^q est le développement du même déterminant où l'on a remplacé la colonne p par la colonne q . Ce nouveau déterminant est nul comme ayant deux colonnes identiques. Ainsi, le déterminant C se réduit aux éléments de la première diagonale et l'on a

$$(5) \quad z_1 = Ax_1, \quad z_2 = Ax_2, \quad z_3 = Ax_3.$$

On en conclut $C = A^3$. Plus généralement, s'il s'agit de déterminants d'ordre n , on a $C = A^n$, et, en remplaçant C par sa valeur BA ,

$$(6) \quad B = A^{n-1}.$$

D'autre part, si l'on porte les valeurs (5) dans les formules (2), on obtient

$$(2') \quad \begin{cases} Ax_1 = b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3, \\ Ax_2 = b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3, \\ Ax_3 = b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3. \end{cases}$$

Ainsi, des formules (1) on déduit les formules (2'). Je peux opérer de même sur les formules (2'). Si je représente par des lettres d les éléments du déterminant D , réciproque de B , j'aurai, en appliquant la même règle,

$$(1') \quad \begin{cases} By_1 = d_1^1 Ax_1 + d_1^2 Ax_2 + d_1^3 Ax_3, \\ By_2 = d_2^1 Ax_1 + d_2^2 Ax_2 + d_2^3 Ax_3, \\ By_3 = d_3^1 Ax_1 + d_3^2 Ax_2 + d_3^3 Ax_3. \end{cases}$$

En comparant ces égalités (1') aux égalités (1), on en conclut

$$d_p^q \frac{A}{B} = a_p^q.$$

et, en remplaçant B par sa valeur A^{n-1} ,

$$(7) \quad d_p^q = A^{n-2} a_p^q.$$

Les formules (6) et (7) s'énoncent respectivement ainsi :

1° Le réciproque d'un déterminant A d'ordre n a pour valeur A^{n-1} ;

2° Le réciproque du réciproque d'un déterminant A d'ordre n a pour éléments ceux de A multipliés par A^{n-2} .
