NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROBERJOT

Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 365-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__365_1>

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. ROBERJOT,
Étudiant à la Faculté des Sciences de Lyon.

Je me propose d'étudier ce mouvement sans employer d'axes particuliers; d'obtenir ainsi les résultats connus et de donner des équations du mouvement une *interprétation géométrique simple*.

p, q, r désignant les composantes de l'axe instantané de rotation, on a pour la vitesse et l'accélération d'un point du corps solide

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= qz - ry, & \frac{d^2x}{dt^2} &= z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} - \omega^2 x + p(px + qx + rz),\\
\frac{dy}{dt} &= rx - pz, & \frac{d^2y}{dt^2} &= x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} - \omega^2 y + q(px + qy + rz),\\
\frac{dz}{dt} &= py - qx, & \frac{d^2z}{dt^2} &= y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} - \omega^2 z + r(px + qy + rz).
\end{aligned}
\right.
$$

Nous poserons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \Sigma m(y^2 + z^2), & \mathrm{B} &= \Sigma m(z^2 + x^2), & \mathrm{C} &= \Sigma m(x^2 + y^2),\\
\mathrm{D} &= \Sigma myz, & \mathrm{E} &= \Sigma mzx, & \mathrm{F} &= \Sigma mxy.
\end{aligned}
$$

Force vive totale du système. — Soit T cette force vive, on a

$$2\mathrm{T} = \Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

ou

$$(2)\quad 2\mathrm{T} = \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{D}qr - 2\mathrm{E}rp - 2\mathrm{F}pq.$$

Moment résultant des quantités de mouvement. Les composantes α, β, γ de l'axe de ce moment sont

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p},\\
\beta &= \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = -\mathrm{F}p + \mathrm{B}q - \mathrm{D}r \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q},\\
\gamma &= \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = -\mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \mathrm{C}r \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que

$$2\mathrm{T} = p\alpha + q\beta + r\gamma.$$

Équations générales du mouvement — Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes; désignons par a, b, c les composantes de l'axe des moments des forces appliquées; nous aurons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=a,$$

ou

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr-\mathrm{F}\frac{dq}{dt}-\mathrm{E}\frac{dr}{dt}$$
$$+\mathrm{F}pr-\mathrm{E}pq-\mathrm{D}q^2-\mathrm{D}r^2=a,$$

de même

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dt}+q\gamma-r\beta=a,\\&\frac{d\beta}{dt}+r\alpha-p\gamma=b,\\&\frac{d\gamma}{dt}+p\beta-q\alpha=c.\end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations du mouvement.

Remarque. — On en tire facilement les relations suivantes

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=p\frac{d\alpha}{dt}+q\frac{d\beta}{dt}+r\frac{d\gamma}{dt}\\&=\alpha\frac{dp}{dt}+\beta\frac{dq}{dt}+\gamma\frac{dr}{dt}\\&=\frac{d\mathrm{T}}{dt}=a\alpha+b\beta+c\gamma\\&=ap+bq+cr.\end{aligned}\right.$$

On voit que

$$(6)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\mathrm{T}-h,$$

c'est-à-dire que la différence entre le travail total et le carré de l'axe OC $= l$ du moment résultant des quantités de mouvement, est constante

$$(6) \qquad 2T - l^2 = h.$$

Théorèmes de Poinsot. — 1° On a

$$2T = \frac{\omega^2}{\rho^2};$$

ω désignant la vitesse instantanée et ρ la distance au point fixe du point K où l'axe instantané perce l'ellipsoïde d'inertie, il suffit d'écrire que le point K

$$\left(\rho\frac{p}{\omega}, \rho\frac{q}{\omega}, \rho\frac{r}{\omega}\right)$$

est sur l'ellipsoïde d'inertie.

2° Le plan tangent en K à l'ellipsoïde d'inertie est perpendiculaire à l'axe OC; l'équation de ce plan est, en effet,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + f'_t = 0,$$

où

$$x = \rho\frac{p}{\omega}, \qquad y = \rho\frac{q}{\omega}, \qquad z = \rho\frac{r}{\omega};$$

or

$$f'_x = Ax - Fy - Ez = (Ap - Fq - Er)\frac{\rho}{\omega} = \frac{\rho\alpha}{\omega};$$

donc l'équation du plan

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \frac{\omega}{\rho};$$

il est perpendiculaire à OC.

3° La distance de l'origine à ce plan tangent est

$$\delta = \frac{\frac{\omega}{\rho}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\omega}{l\rho}.$$

La relation

$$2T = l^2 - h$$

peut donc s'écrire

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = l^2 - h$$

ou

$$\delta^2 - 1 = - \frac{h}{l^2}.$$

Remarque I. — Si, à un moment donné,

$$p = \alpha, \qquad q - \beta, \qquad r = \gamma,$$

les équations du mouvement se réduisent à ·

$$2T = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = l^2 = \omega^2;$$

on a

$$\delta = \rho = 1.$$

Remarque II. — Si $a = b = c = 0$, les équations se réduisent à

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$$

$OC = l$ est constant, et

$$\frac{dT}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad T = h, \qquad h = \text{const.},$$

d'où

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \text{const.}$$

On en déduira, par la méthode de Poinsot, les équations de la polhodie et de l'erpolhodie.

Interprétation géométrique des équations (4) *du mouvement.* — Remarquons que $q\gamma - r\beta$, $r\alpha - p\gamma$ et $p\beta - q\alpha$ sont les composantes de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$ considéré comme faisant partie du corps solide; désignons-les par $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$; $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ sont les composantes de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$ considéré comme l'extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement. Les équations (4) du mouvement peuvent donc s'écrire

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} &= a, \\ \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial t} &= b, \\ \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial\gamma}{\partial t} &= c. \end{aligned}\right.$$

Elles expriment que la résultante de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$, considéré comme point matériel du corps solide, et de la vitesse du point géométrique $C(\alpha, \beta, \gamma)$, considéré comme extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement, est égale en grandeur et en direction à l'axe résultant OA des moments des forces extérieures.

On peut considérer la courbe S lieu des points C dans le solide et la courbe M lieu des mêmes points dans l'espace, de sorte que les différents points C'_1, C''_1, ... du corps solide viendront coïncider successivement avec les points C', C'', ... de l'espace; en d'autres termes, le cône de sommet O de base S roulera en glissant sur le cône de sommet O et de base M et la vitesse de glissement est (a, b, c).

Si $a = b = c = 0$, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \qquad \cdots\cdot$$