NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SVECHNICOFF

Le centre d'inertie et les moments d'inertie du cours épicycloïdal

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 385-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__385_0>

LE CENTRE D'INERTIE ET LES MOMENTS D'INERTIE DU CORPS ÉPICYCLOIDAL;

PAR M. SVECHNICOFF,
Professeur au Gymnase de Troïtzk.

Le moment d'inertie de la surface épicycloïdale homogène autour de l'axe oz est égal à

$$j_{oz} = \sigma \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} (x^2+y^2)\,dS,$$

si l'on désigne par σ la densité de la surface;

$$dS = 4a^2(n+\cos\alpha)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi\,d\alpha,$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = a^2[&(n^2+\sin^2 n\varphi) \\ &+ 2n(1-\cos n\varphi)\cos\alpha + (1-\cos n\varphi)^2\cos^2\alpha]. \end{aligned}$$

On sait que

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^n x\,dx = 0,$$

si n est un nombre impair.

Par conséquent, les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$ se détruisent et

$$\begin{aligned} j_{oz} = 4n\sigma a^4 &\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi \\ &\times \int_0^{2\pi} [(n^2+\sin^2 n\varphi)+(3-4\cos n\varphi+\cos^2 n\varphi)\cos^2\alpha]\,d\alpha, \end{aligned}$$

$$j_{oz} = 4n\sigma a^4\pi \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3\frac{n\varphi}{2}(2n^2+5-4\cos n\varphi-\cos^2 n\varphi)\,d\varphi,$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4 \int_0^{\pi} \sin^3\psi(2n^2+8-4\cos^2\psi-4\cos^4\psi)\,d\psi,$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4 \int_0^{\pi} \sin\psi[2n^2+8-(2n^2+12)\cos^2\psi+4\cos^6\psi]\,d\psi.$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4\left[2(2n^2+8) - \frac{2(2n^2+12)}{3} + \frac{8}{7}\right],$$

$$j_{oz} = \frac{64\pi\sigma a^4}{21}(7n^2+24) = \frac{ma^2}{7}(7n^2+24),$$

si l'on désigne par m la masse de la surface épicycloïdale.

Le moment d'inertie du corps épicycloïdal homogène autour de l'axe oz est égal à

$$I_{oz} = 2\sigma \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} (x^2+y^2)\,dU.$$

En remplaçant x^2+y^2 par son expression et dU par

$$a^3(1-\cos n\varphi)^3(n+\cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\varphi\,d\alpha,$$

nous pouvons détruire les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$; par suite

$$I_{oz} = 2n\sigma a^5 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^3\,d\varphi$$
$$\times \int_0^{\pi} [(n^2+\sin^2 n\varphi)\sin^2\alpha$$
$$+ (3-4\cos n\varphi+\cos^2 n\varphi)\sin^2\alpha\cos^2\alpha]\,d\alpha,$$

$$I_{oz} = 2n\sigma a^5\pi \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^3$$
$$\times\left(\frac{n^2+\sin^2 n\varphi}{2} + \frac{3-4\cos n\varphi+\cos^2 n\varphi}{8}\right)d\varphi$$
$$= \frac{\pi\sigma a^5}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos\psi)^3(4n^2+7-4\cos\psi-3\cos^2\psi)\,d\psi.$$

En détruisant les termes qui contiennent $\cos\psi$,

$\cos^3\psi$, $\cos^5\psi$, on a

$$\mathrm{I}_{oz} = \frac{\pi\sigma a^5}{4}\int_0^{2\pi}[4n^2+7+6(2n^2+5)\cos^2\psi - 5\cos^4\psi]\,d\psi$$

$$= \frac{\pi^2\sigma a^5}{4}\left[(4n^2+7)2+6(2n^2+5)-\frac{15}{4}\right],$$

$$\mathrm{I}_{oz} = \frac{\pi^2\sigma a^5}{16}(80n^2+161) = \frac{\mathrm{M}a^2}{80}(80n^2+161),$$

si l'on désigne par M la masse du corps épicycloïdal.

Chaque partie du corps épicycloïdal a deux plans de symétrie qui passent par l'origine des coordonnées. Le plan xy est un de ces plans. L'autre plan de symétrie est perpendiculaire à la droite qui passe par deux points de rebroussement. Désignons par A le point de rebroussement, situé sur l'axe ox, et par B l'autre point de rebroussement. Menons la droite oy' perpendiculaire à AB et la droite ox' parallèle à AB, de sorte que l'angle xox' soit obtus. Désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface épicycloïdale par rapport aux axes ox', oy', oz. Alors

$$x' = -x\sin\frac{\pi}{n} + y\cos\frac{\pi}{n}, \qquad y' = x\cos\frac{\pi}{n} + y\sin\frac{\pi}{n}.$$

Les équations de la surface épicycloïdale par rapport aux axes ox', oy', oz sont

$$x' = a\left\{[n+(1-\cos n\varphi)\cos\alpha]\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)-\sin n\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)\right\},$$

$$y' = a\left\{[n+(1-\cos n\varphi)\cos\alpha]\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)+\sin n\varphi\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)\right\},$$

$$z = a(1-\cos n\varphi)\sin\alpha.$$

Posons

$$\frac{\pi}{n}-\varphi=\psi.$$

Alors

$$x' = -a[n\sin\psi+(1+\cos n\psi)\cos\alpha\sin\psi+\sin n\psi\cos\psi],$$

$$y' = a[n\cos\psi+(1+\cos n\psi)\cos\alpha\cos\psi-\sin n\psi\sin\psi],$$

$$z = a(1+\cos n\psi)\sin\alpha.$$

Quand φ augmente de zéro jusqu'à $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{2\pi}{n}$, ψ diminue de $\frac{\pi}{n}$ jusqu'à zéro et $-\frac{\pi}{n}$.

Le centre d'inertie de la surface épicycloïdale est situé sur l'axe oy'. Désignons par p sa distance au point O. Alors

$$mp = \sigma \int_{\psi=\frac{\pi}{n}}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} y'\, dS.$$

En remplaçant y' par son expression et dS par $-4a^2 \cos^3 \frac{n\psi}{2}(n + \cos\alpha)\, d\psi\, d\alpha$, et en faisant l'intégration relative à α, nous pouvons détruire les termes qui contiennent $\cos\alpha$.

Par conséquent,

$$mp = 4a^3\sigma \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2}\, d\psi$$

$$\times \int_0^{2\pi} [\, n(n \cos\psi - \sin\psi \sin n\psi) + (1\ \cos n\psi) \cos\psi \cos^2\alpha\,]\, d\alpha.$$

$$mp = 8\pi a^3 \sigma \int_0^{\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2} [(2n^2+1)\cos\psi - 2n \sin\psi \sin n\psi + \cos\psi \cos n\psi]\, d\psi$$

ou

$$mp = 8\pi a^3 \sigma \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi.$$

si l'on pose

$$f(\psi) = \left(\frac{1}{4} \cos \frac{3n\psi}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{n\psi}{2}\right)$$

$$\times \left[(2n^2 + 1)(\cos\psi - \frac{2n-1}{2} \cos(n-1)\psi + \frac{2n+1}{2} \cos(n+1)\psi\right].$$

$$f(\psi) = \frac{6n^2 - 2n + 5}{8}\cos\frac{n-2}{2}\psi + \frac{6n^2 + 2n + 5}{8}\cos\frac{n+2}{2}\psi$$
$$+ \frac{4n^2 - 6n + 5}{16}\cos\frac{3n-2}{2}\psi + \frac{4n^2 + 6n + 5}{16}\cos\frac{3n+2}{2}\psi$$
$$- \frac{2n-1}{16}\cos\frac{5n-2}{2}\psi + \frac{2n+1}{16}\cos\frac{5n+2}{2}\psi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi = \frac{6n^2 - 2n + 5}{4(n-2)}\cos\frac{\pi}{n} + \frac{6n^2 + 2n + 5}{4(n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$- \frac{4n^2 - 6n + 5}{8(3n-2)}\cos\frac{\pi}{n} - \frac{4n^2 + 6n + 5}{8(3n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$- \frac{2n-1}{8(5n-2)}\cos\frac{\pi}{n} + \frac{2n+1}{8(5n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{n}\left(\frac{12n^3 + 2n}{n^2 - 4} - \frac{12n^3 + 3n}{9n^2 - 4} + \frac{n}{25n^2 - 4}\right)$$
$$= \frac{600\,n^7\cos\frac{\pi}{n}}{(n^2 - 4)(9n^2 - 4)(25n^2 - 4)}.$$

Il en résulte que

$$p = \frac{225\,n^7 a\cos\frac{\pi}{n}}{(n^2 - 4)(9n^2 - 4)(25n^2 - 4)}.$$

En posant $n = 1$ et $n = 2$, on a

$$p = \frac{5a}{7} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{75\pi a}{128}.$$

Si $n = 1$, les droites oy' et ox forment l'angle π.

Désignons par p' la distance du centre d'inertie de la surface épicycloïdale à la droite AB.

Alors

$$p' = p - na\cos\frac{\pi}{n}.$$

Par le milieu de la droite AB, menons la droite $o'z'$ parallèle à oz. Le moment d'inertie de la surface épicycloïdale autour de l'axe $o'z'$ est égal à

$$j_{o'z'} = j_{oz} - m(p^2 - p'^2) = j_{oz} - mna\cos\frac{\pi}{n}\left(2p - na\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

$$j_{o'z'} = ma^2\left[n^2\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n}\right) + \frac{24}{7} - \frac{450\,n^8\cos^2\frac{\pi}{n}}{(n^2 - 4)(9n^2 - 4)(25n^2 - 4)}\right].$$

En posant $n = \infty$, on a

$$j_{o'z'} = ma^2\left(\pi^2 - \frac{9104}{1575}\right).$$

Considérons la surface de révolution engendrée par la cycloïde tournant autour de sa base. Le moment d'inertie de cette surface autour de l'axe équatorial est égal à l'expression trouvée, parce que la surface considérée est la limite de la surface épicycloïdale, quand n augmente indéfiniment.

D'autre part, ce moment d'inertie est égal à

$$4\pi\sigma a^4\int_0^{2\pi}(\varphi - \sin\varphi)^2(1 - \cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$
$$+ 2\pi\sigma a^4\int_0^{2\pi}(1 - \cos\varphi)^3\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - m\pi^2 x^2.$$

Le deuxième membre est la moitié du moment d'inertie de la même surface autour de l'axe de révolution. Ce moment d'inertie est égal à

$$64\pi\sigma a^4\int_0^{\pi}\sin^7\psi\,d\psi = \frac{2048\pi\sigma a^4}{35} = \frac{96\,ma^2}{35}.$$

Désignons par P et P′ les distances du centre d'inertie du corps épicycloïdal au point O et à la droite AB. Alors

$$\mathrm{MP} = \sigma\int_{\psi=+\frac{\pi}{n}}^{\psi=-\frac{\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} y'\,d\mathrm{V},$$

$$d\mathrm{V} = -\,a^3(1 - \cos n\psi)^3(n + \cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\psi\,d\alpha.$$

Par suite,

$$\mathrm{MP} = \sigma a^4 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} (1 + \cos n\psi)^3 \, d\psi \int_0^{2\pi} [n(n\cos\psi - \sin\psi \sin n\psi)\sin^2\alpha$$
$$+ (1+\cos n\psi)\cos\psi \cos^2\alpha \sin^2\alpha \, d\alpha].$$

Nous avons supprimé les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$

$$\mathrm{MP} = \frac{\sigma\pi a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi,$$

si l'on pose

$$f(\psi) = (1 + \cos n\psi)^3 [(4n^2+1)\cos\psi - 4n\sin\psi \sin n\psi + \cos\psi \cos n\psi]$$
$$= \left(\frac{5}{2} + \frac{15\cos n\psi}{4} + \frac{3\cos 2n\psi}{2} + \frac{\cos 3n\psi}{4}\right)$$
$$\times \left[(4n^2+1)\cos\psi - \frac{4n-1}{2}\cos(n-1)\psi + \frac{4n+1}{2}\cos(n+1)\psi\right],$$

$$f(\psi) = \frac{80n^2+35}{8}\cos\psi + \frac{15n^2-7n+7}{2}\cos(n-1)\psi$$
$$+ \frac{15n^2+7n+7}{2}\cos(n+1)\psi + \frac{12n^2-14n+7}{4}\cos(2n-1)\psi$$
$$+ \frac{12n^2+14n+7}{4}\cos(2n+1)\psi + \frac{n^2-3n+1}{2}\cos(3n-1)\psi$$
$$+ \frac{n^2+3n+1}{2}\cos(3n+1)\psi - \frac{4n-1}{16}\cos(4n-1)\psi$$
$$+ \frac{4n+1}{16}\cos(4n+1)\psi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi = \frac{80n^2+35}{8}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{15n^2-7n+7}{2(n-1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$- \frac{15n^2+7n+7}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{n} - \frac{12n^2-14n+7}{4(2n-1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$+ \frac{12n^2+14n+7}{4(2n+1)}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{n^2-3n+1}{2(3n-1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$- \frac{n^2+3n+1}{2(3n+1)}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$= \sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{20n^2+9}{2} + \frac{8n^2+7}{n^2-1} + \frac{16n^2-7}{2(4n^2-1)} - \frac{8n^2-1}{9n^2-1}\right]$$
$$= \frac{360 n^8 \sin\frac{\pi}{n}}{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

Il en résulte que

$$P = \frac{36 n^8 a \sin \frac{\pi}{n}}{\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

En posant $n = 1$ et $n = 2$, on a

$$P = \frac{3a}{4} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1024\,a}{175\pi}.$$

Le moment d'inertie du corps épicycloïdal autour de l'axe $o'z'$ est égal à $I_{o'z} = I_{oz} - M(P^2 - P'^2)$ ou

$$I_{oz'} = Ma^2\left[n^2\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n}\right) + \frac{161}{80} - \frac{36 n^9 \sin\frac{2\pi}{n}}{\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}\right].$$

En posant $n = \infty$, on a

$$I_{o'z'} = Ma^2\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{511}{720}\right).$$

Considérons le corps de révolution engendré par la cycloïde tournant autour de sa base. Le moment d'inertie de ce corps autour de l'axe équatorial passant par le centre d'inertie est égal à l'expression trouvée. D'autre part, il est égal à

$$\pi\sigma a^5\int_0^{2\pi}(\varphi - \sin\varphi)^2(1-\cos\varphi)^3\,d\varphi$$
$$+ \frac{\pi\sigma a^5}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^5\,d\varphi - M\pi^2 a^2.$$

Le deuxième membre est la moitié du moment d'inertie du même corps autour de l'axe de révolution. Ce moment d'inertie est égal à

$$32\pi\sigma a^5\int_0^{\pi}\sin^{10}\psi\,d\psi = \frac{63\sigma\pi^2 a^5}{8} = \frac{63 Ma^2}{40}.$$