

E. CAHEN

## Note sur la convergence de quelques séries

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 10 (1891), p. 453-459

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1891\\_3\\_10\\_\\_453\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__453_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## NOTE SUR LA CONVERGENCE DE QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E. CAHEN,

Professeur au lycée de Rennes.

---

Soit une série  $\sum_1^{\infty} \varphi(n)$ .

Soit  $\psi(n)$  la fonction primitive de  $\varphi(n)$ , de façon que  $\varphi(n) = \psi'(n)$ .

Le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi(n + \theta_n) = \psi(n + 1) - \psi(n), \quad 0 < \theta_n < 1;$$

d'où

$$\sum_1^n \varphi(n + \theta_n) = \psi(n + 1) - \psi(1).$$

Il suffit de voir si la fonction  $\psi$  converge ou non vers une limite lorsque  $n$  augmente indéfiniment, pour dé-

cider de la convergence ou de la divergence de la série

$$\sum_1^{\infty} \varphi(n + \theta_n).$$

Pour passer de là à la série  $\sum \varphi(n)$ , supposons que la série  $\sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)]$  soit convergente. Dans ces conditions, la série  $\sum \varphi(n)$  est convergente ou divergente en même temps que la série  $\sum \varphi(n + \theta_n)$ , et le problème est résolu.

Cette méthode s'applique, quelle que soit la fonction  $\varphi(n)$ .

Dans le cas particulier où cette fonction est toujours de même signe, par exemple positive, et indéfiniment décroissante en valeur absolue, on retrouve un théorème dû à Cauchy.

Dans ce cas, en effet, la série  $\sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)]$  est convergente, puisque  $\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)$  est  $< 0$  et  $<$  en valeur absolue que  $\varphi(n + 1) - \varphi(n)$ . La somme des  $n$  premiers termes de cette série est donc  $<$  en valeur absolue que  $\varphi(1) - \varphi(n + 1)$  qui tend vers  $\varphi(1)$ . Donc la série  $\sum \varphi(n)$  est convergente ou divergente suivant que  $\varphi(n)$  tend ou non vers une limite pour  $n = \infty$ . Dans tous les cas, la méthode permet d'avoir deux limites de la somme  $\sum_1^n \varphi(n)$ , comme on le verra par les exemples suivants.

EXEMPLES.

*Premier exemple.* — Série harmonique :  $\sum \frac{1}{n}$ .

$$\varphi(n) = \frac{1}{n}, \quad \psi(n) = \log n.$$

Donc

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n + \theta_n};$$

d'où l'on déduit

$$\log(n+1) - \log n < \frac{1}{n} < \log n - \log(n-1)$$

et, par suite,

$$\log(n+1) < \sum_1^n \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Si l'on fait croître  $n$  indéfiniment, on déduit de là

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - \log n\right) < 1;$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{n} - \log n\right)$$

tend vers une limite  $C$  comprise entre 0 et 1. C'est la constante d'Euler.

*Deuxième exemple.* —  $\sum \frac{1}{n^s}$ .

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^s}, \quad \psi(n) = \frac{n^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{(n + \theta_n)^s};$$

d'où

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} < \frac{1}{n^s} < \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} < \sum_1^n \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}.$$

Ceci prouve d'abord que si  $s > 1$ , la série est con-

vergente, et que sa somme est

$$< 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Si  $s < 1$ , la série est divergente, et l'on a

$$0 < \sum_1^n \left[ \left( \frac{1}{n^s} \right) - \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} \right] < 1 - \frac{(n+1)^{1-s} - n^s}{1-s}.$$

Ce qui prouve que  $\sum_1^n \left[ \frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} \right]$  tend, pour  $n = \infty$ , vers une limite  $C_s$ ,  $0 < C_s < 1$ , généralisation de la constante d'Euler.

*Troisième exemple.* —  $\sum_2^\infty \frac{1}{n \log n}.$

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n}, \quad \psi(n) = \log \log n,$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n = \frac{1}{(n+\theta_n) \log(n+\theta_n)},$$

$$\begin{aligned} \log \log(n+1) - \log \log n &< \frac{1}{n \log n} \\ &< \log \log(n) - \log \log(n-1); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log \log(n+1) - \log \log 2 &< \sum_2^n \frac{1}{n \log n} \\ &< \log \log n - \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}. \end{aligned}$$

Comme  $\log \log n$  croît indéfiniment, la série est divergente et l'on voit de plus que

$$\sum_2^n (\log \log n - \log \log n)$$

tend vers une limite comprise entre

$$- \log \log 2 \quad \text{et} \quad - \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}.$$

Quatrième exemple. —  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$ .

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log^{\alpha} n}, \quad \psi(n) = \frac{-1}{\alpha - 1} \frac{1}{\log^{\alpha-1} n},$$

$$\frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)} \right] = \frac{1}{(n + \theta_n) \log^{\alpha}(n + \theta_n)},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha}(n+1)} \right] \\ & < \frac{1}{n \log^{\alpha} n} < \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n-1)} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n)} \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)} \right] \\ & < \sum_2^n \frac{1}{n \log^{\alpha} n} < \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1} n} \right) + \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2}. \end{aligned}$$

Donc, si  $\alpha > 1$ , la série est convergente, et sa somme est comprise entre

$$\frac{1}{(\alpha - 1) \log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\alpha - 1) \log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2}.$$

Si  $\alpha < 1$ , la série est divergente. Considérons

$$\sum_2^{\infty} \left( \frac{1}{n \log^{\alpha} n} - \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\log^{\alpha-1} n} \right);$$

cette quantité tend vers une limite comprise entre

$$-\frac{1}{(1 - \alpha) \log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{(1 - \alpha) \log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2 \log^{\alpha} 2}.$$

Dans les exemples précédents, la règle de Cauchy suffirait pour décider de la convergence ou de la divergence. Voici un exemple où elle ne suffit plus.

*Cinquième exemple.* — Soit la série  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(a \log n)}{n}$ ,  
 $a$  étant quelconque.

$$\varphi(n) = \frac{\cos(a \log n)}{n}, \quad \psi(n) = \frac{\sin(a \log n)}{a}.$$

Ici la fonction  $\psi(n)$  ne tend vers aucune limite quand  $n$  croit indéfiniment. Donc, d'après ce qui a été dit plus haut, si l'on démontre que la série  $\sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)]$  est convergente, il sera démontré que la série proposée est convergente.

Or

$$\begin{aligned} \sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)] &= \sum \left\{ \frac{\cos[a \log(n + \theta_n)]}{n + \theta_n} - \frac{\cos(a \log n)}{n} \right\} \\ &= \sum \frac{n \{ \cos[a \log(n + \theta_n)] - \cos(a \log n) \} + \theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)} \\ &= \sum \frac{-2n \sin\left[\frac{a}{2} \log n(n + \theta_n)\right] \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right] + \theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)}. \end{aligned}$$

La série  $\sum \frac{\theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)}$  a ses termes  $<$  en valeur absolue que ceux de la série  $\frac{1}{n(n-1)}$ . Donc elle est convergente.

Quant à l'autre partie de la série

$$\sum \frac{-2 \sin\left[\frac{a}{2} \log(n + \theta_n)\right] \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right]}{n + \theta_n},$$

on a

$$\begin{aligned} \text{mod} \sin\left[\frac{a}{2} \log n(n + \theta_n)\right] &< 1, \\ \text{mod} \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right] &< \text{mod} \frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right) \end{aligned}$$

pour des valeurs suffisamment grandes de  $n$ , *a fortiori*  
 $< \text{mod } \frac{b}{2n}$ . Donc le terme général de cette série est  $<$   
 en valeur absolue que

$$\frac{b}{n(n + \theta_n)} < \frac{b}{n(n - 1)}.$$

Donc elle est convergente.

Même démonstration pour

$$\sum \frac{\sin(a \log n)}{n}.$$

La même méthode peut servir à démontrer que les séries

$$\sum \frac{\cos(a \log n)}{n \log n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin(a \log n)}{n \log n}$$

sont *convergentes*.