NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SVÉCHNICOFF

Les centres d'inertie de la moitié et du quart du corps épicycloïdal

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 473-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__473_0>

LES CENTRES D'INERTIE DE LA MOITIÉ ET DU QUART DU CORPS ÉPICYCLOIDAL;

PAR M. SVÉCHNICOFF,
Professeur au gymnase de Troitzk.

Le plan xoy divise la surface épicycloïdale et le corps épicycloidal en deux parties égales. Désignons par l et L les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan xy,

$$\frac{1}{2}ml = \sigma \int\!\!\int z\,dS$$

$$= 4a^3\sigma \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi \int_0^{\pi} (n+\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha$$

$$= 8a^3n\sigma \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{512\sigma a^3}{15}.$$

Par suite,

$$l = \frac{16a}{5\pi}.$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{ML} = \sigma \int\!\!\int\!\!\int z\,dx\,dy\,dz = \frac{\sigma}{2}\int\!\!\int z^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{\sigma a^4}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^4\,d\varphi \int_0^{\pi} (n+\cos\alpha)\sin^3\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{2\sigma n a^4}{3}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^4\,d\varphi = \frac{35\pi\sigma a^4}{6}.$$

Par suite,

$$\mathrm{L} = \frac{7a}{3\pi}.$$

Le plan zoy' divise la surface et le corps épicycloïdal en deux parties égales. Désignons par t et T les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan zy',

$$\frac{1}{2}mt = \sigma \int_{\psi=0}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} x'\,dS = 4a^3\sigma$$

$$\times \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3\frac{n\psi}{2}\,d\psi \int_0^{2\pi} [n(n\sin\psi + \cos\psi\sin n\psi) + (1+\cos n\psi)\sin\psi\cos^2\alpha]\,d\alpha$$

$$\frac{1}{2}mt = 4a^3\sigma\pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3\frac{n\psi}{2}$$

$$\times [(2n^2+1)\sin\psi + 2n\cos\psi\sin n\psi + \sin\psi\cos n\psi]\,d\psi,$$

$$\frac{1}{2}mt = 4a^3\sigma\pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi,$$

$$f(\psi) = -\frac{6n^2-2n+5}{8}\sin\frac{n-2}{2}\psi + \frac{6n^2+2n+5}{8}\sin\frac{n+2}{2}\psi$$
$$-\frac{4n^2-6n+5}{16}\sin\frac{3n-2}{2}\psi + \frac{4n^2+6n+5}{16}\sin\frac{3n+2}{2}\psi$$
$$+\frac{2n-1}{16}\sin\frac{5n-2}{2}\psi + \frac{2n+1}{16}\sin\frac{5n+2}{2}\psi,$$

$$\int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi = \frac{600n^7\sin\frac{\pi}{n} - 1040n^6 - 872n^4 + 960n^2 - 128}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

Par suite,

$$t = \frac{3a\left(75n^7\sin\frac{\pi}{n} - 130n^6 - 109n^4 + 120n^2 - 16\right)}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

En posant $n=1$, $n=2$, $n=\infty$, on a

$$t = \frac{9a}{7}, \qquad t = \frac{11a}{8}, \qquad t = \pi a - \frac{26a}{15}.$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{MT} = \sigma\iiint x'\,dx'\,dy'\,dz$$

$$= \sigma\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} x'\,dV = \frac{\pi\sigma a^4}{4}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{n}}(1+\cos n\psi)^3[(4n^2-1)\sin\psi + 4n\cos\psi\sin n\psi + \sin\psi\cos n\psi]\,d\psi,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{MT} = \frac{\pi\sigma a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi,$$

$$\begin{aligned}
f(\psi) = {} & \frac{80n^2+35}{8}\sin\psi - \frac{15n^2-7n+7}{2}\sin(n-1)\psi \\
& + \frac{15n^2+7n+7}{2}\sin(n+1)\psi - \frac{2n^2-14n+7}{4}\sin(2n-1)\psi \\
& + \frac{12n^2+14n+7}{4}\sin(2n+1)\psi - \frac{n^2-3n+1}{2}\sin(3n-1)\psi \\
& + \frac{n^2+3n+1}{2}\sin(3n+1)\psi \\
& + \frac{4n-1}{16}\sin(4n-1)\psi + \frac{4n+1}{16}\sin(4n+1)\psi.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi = \frac{360\,n^8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) - 512n^6 - 384n^4 + 192n^2 - 16}{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

Par suite,

$$\mathrm{T} = \frac{4a\left[45n^8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) - 64n^6 - 48n^4 + 24n^2 - 2\right]}{5\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

En posant $n=1$, $n=2$, $n=\infty$, on a

$$\mathrm{T} = \frac{16a}{5\pi}, \qquad \mathrm{T} = \frac{24a}{7\pi}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\pi a}{2} - \frac{64a}{45\pi}.$$

D'après cela, il est facile de déterminer la position du centre d'inertie de la moitié ou du quartier de la surface et du corps épicycloïdal. En calculant

$$\sigma \int\!\!\int\!\!\int z^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{\sigma}{3}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} z^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{\sigma a^5}{3}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^5\,d\varphi\int_0^{2\pi}(n+\cos\alpha)\sin^4\alpha\,d\alpha,$$

on a

$$\frac{63\pi^2\sigma a^5}{16} = \frac{63\,\mathrm{M}\,a^2}{80}.$$