

H. LAURENT

**Sur les formes quadratiques et sur
l'équation dite en s**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 503-507

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__503_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Telle est la forme que l'on peut donner à l'équation $\frac{\partial S}{\partial s} = 0$; en la combinant avec $S = 0$, cela exige que tous les mineurs de S soient nuls, si les a_{ij} sont réels.

Cherchons la condition pour que $S = 0$ ait une racine triple; des considérations analogues nous conduisent à différencier les formules (3) et l'on a

$$(a_{11} - s) \frac{d^2 x}{ds^2} + \dots + a_{1n} \frac{d^2 x_n}{ds^2} - 2 \frac{dx_1}{ds} = 0, \\ \dots\dots\dots$$

En multipliant la seconde par $\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11} \partial a_{12}}$, la suivante par $\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11} \partial a_{23}}$, ... et en les ajoutant, on a

$$\frac{dx_2}{ds} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{11} \partial a_{22}} + \frac{dx_3}{ds} \frac{\partial^2 S}{\partial a_{11} \partial a_{23}} + \dots = 0;$$

mais $\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \dots$ étant proportionnels à leurs coefficients, on a encore

$$\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11} \partial a_{22}} = 0, \quad \frac{\partial_2 S}{\partial a_{11} \partial a_{23}} = 0, \quad \dots,$$

et ainsi de suite.

L'esprit de cette méthode s'applique encore dans une foule d'autres circonstances : par exemple, dans la théorie des intersections des coniques et des quadriques. Pour ne pas trop allonger cet article, nous considérerons seulement les applications aux quadriques.

Soient $f = 0, g = 0$ les équations de deux quadriques, f et g désignant des fonctions de x, y, z, t homogènes. Nous ferons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \\ f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \dots$$

Cherchons un point x, y, z, t ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques, il sera déterminé par les équations

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = \frac{f_4}{g_4},$$

ou, en égalant ces rapports à $-s$,

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 + g_1 s = 0, & f_2 + g_2 s = 0, \\ f_3 + g_3 s = 0, & f_4 + g_4 s = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine x, y, z, t entre ces formules, on obtient une équation du quatrième degré en s

$$S = 0,$$

qui, en général, aura quatre racines distinctes, à chacune desquelles correspondra un point x, y, z, t donné par les formules (4); tout cela est bien connu.

1° Je dis que si l'équation $S = 0$ a une racine double, les surfaces $f = 0, g = 0$ sont tangentes. En effet, l'équation $S = 0$ peut être considérée comme étant la première des équations (1), où x, y, z sont remplacés par leurs valeurs tirées des autres formules (1). En différentiant ces équations, on aura

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (f_{11} + g_{11}s) \frac{dx}{ds} + (f_{12} + g_{12}s) \frac{dy}{ds} + (f_{13} + g_{13}s) \frac{dz}{ds} + g_1 = 0, \\ (f_{21} + g_{21}s) \frac{dx}{ds} + (f_{22} + g_{22}s) \frac{dy}{ds} + (f_{23} + g_{23}s) \frac{dz}{ds} + g_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (f_{41} + g_{41}s) \frac{dx}{ds} + (f_{42} + g_{42}s) \frac{dy}{ds} + (f_{43} + g_{43}s) \frac{dz}{ds} + g_4 = 0. \end{array} \right.$$

On en tire

$$\Delta \begin{vmatrix} f_{11} + g_{11}s & f_{12} + g_{12}s & f_{13} + g_{13}s & g_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ f_{41} + g_{41}s & f_{42} + g_{42}s & f_{43} + g_{43}s & g_4 \end{vmatrix} = 0;$$

ajoutant les lignes avec la dernière après les avoir multipliées par x, y, z, t , on a, en vertu de (1) et du théorème des fonctions homogènes,

$$\begin{vmatrix} f_{11} + g_{11}s & f_{12} + g_{12}s & f_{13} + g_{13}s & g_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & g \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut $g = 0$ et, par suite, en vertu de (1), $f = 0$. Les surfaces $g = 0, f = 0$ en leur point commun x, y, z sont donc tangentes.

2° Cette démonstration est en défaut quand les mineurs de S sont nuls, car le multiplicateur de g , dans la formule précédente, est nul. Mais alors les formules (1) se réduisent à deux distinctes; il y a une infinité de pôles x, y, z en ligne droite répondant à la racine double; la droite de ces points rencontre $f = 0$ en deux points où l'on a aussi $g = 0$: les surfaces $f = 0, g = 0$ sont alors bitangentes; elles se coupent d'ailleurs suivant deux courbes planes, puisque $f + \lambda g = 0$ représente alors deux plans.

3° Si tous les mineurs de second ordre de S étaient nuls, un raisonnement analogue prouverait que $S = 0$ a une racine triple et que les pôles correspondants x, y, z seraient dans un plan; les deux surfaces $f = 0, g = 0$ circonscrites l'une à l'autre se toucheraient suivant une courbe plane.

