NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOLENBROCH

Sur quelques propriétés du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 121-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__121_0>

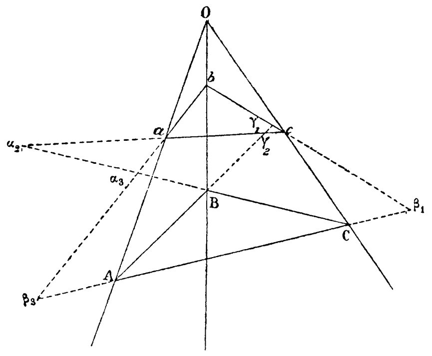
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

PAR M. MOLENBROCH.

THÉORÈME. — *Si deux triangles abc*, ABC *sont homologiques et si l'on détermine les points d'intersection de chaque côté de l'un avec les deux côtés non homologues de l'autre, les six points ainsi obtenus sont situés sur une conique.*

Démonstration géométrique (voir *fig.* 1). — Soient α_2, α_3 les points d'intersection du côté BC avec *ca*, *ab*;

Fig. 1.



β_3, β_1 ceux de CA avec *ab*, *bc*; enfin γ_1, γ_2 ceux AB avec *bc*, *ca*.

Considérons l'hexagone $\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_1\gamma_1\gamma_2$; les points d'intersection des côtés

$$\alpha_2\alpha_3, \quad \beta_1\gamma_1; \quad \alpha_3\beta_3, \quad \gamma_1\gamma_2; \quad \beta_3\beta_1, \quad \gamma_1\gamma_2,$$

ou des droites

BC, *bc*; *ab*, AB; AC, *ac*

sont, d'après un théorème bien connu, en ligne droite. On en conclut que l'hexagone est inscrit à une conique.

Démonstration analytique. — Soient

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

les équations de BC, CA, AB en coordonnées trilinéaires. Le centre d'homologie est donné par y_1, y_2, y_3. Les coordonnées des points a, b, c seront proportionnelles à

$$z_1, y_2, y_3; \quad y_1, z_2, y_3; \qquad y_1, y_2, z_3,$$

où z_1, z_2, z_3 sont des quantités arbitraires.

L'équation du côté bc sera

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

et les coordonnées du point β_1 sont déterminées par cette équation, et $x_2 = 0$.

Il s'ensuit que l'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \\ z_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \end{vmatrix} + \lambda x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{2}$$

dans laquelle λ est une quantité variable, représente des courbes de troisième degré passant par les neuf points d'intersection de chacune des droites BC, CA, AB avec bc, ca, ab.

L'équation de l'axe d'homologie des triangles abc, ABC passant par les points d'intersection de BC et bc, CA et ca, AB et ab, sera

$$\frac{x_1}{y_1 - z_1} + \frac{x_2}{y_2 - z_2} + \frac{x_3}{y_3 - z_3} = 0. \tag{3}$$

Posons maintenant

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{z_2 z_3 - y_2 y_3}{y_1(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)} = a_1,\\
&\frac{z_3 z_1 - y_3 y_1}{y_2(y_3 - z_3)(y_1 - z_1)} = a_2,\\
&\frac{z_1 z_2 - y_1 y_2}{y_3(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)} = a_3,\\
&\frac{1}{y_1 - z_1} = b_1,\\
&\frac{1}{y_2 - z_2} = b_2,\\
&\frac{1}{y_3 - z_3} = b_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (2), (3) se réduisent aux deux suivantes

$$
(5)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&(a_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)(b_1 x_1 + a_2 x_2 + b_3 x_3)\\
&\qquad\qquad \times (b_1 x_1 + b_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda' x_1 x_2 x_3 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(6)\qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0,
$$

λ' étant une variable différente de λ.

Une nouvelle réduction s'obtient en introduisant la notation

$$
(7)\qquad \mathrm{L} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,
$$

$$
(8)\qquad a_1 - b_1 = c_1, \qquad a_2 - b_2 = c_2, \qquad a_3 - b_3 = c_3.
$$

En effet, l'équation de l'axe d'homologie devient

$$
\mathrm{L} = 0,
$$

et, au lieu de (5), on pourra mettre

$$
(\mathrm{L} + c_1 x_1)(\mathrm{L} + c_2 x_2)(\mathrm{L} + c_3 x_3) + \lambda' x_1 x_2 x_3 = 0.
$$

En attribuant à λ' la valeur $-c_1 c_2 c_3$, cette équation prend la forme

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}[\mathrm{L}^2 + \mathrm{L}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)\\
&\qquad + c_2 c_3 x_2 x_3 + c_3 c_1 x_3 x_1 + c_1 c_2 x_1 x_2] = 0;
\end{aligned}
$$

elle exprime que la courbe du troisième degré passant par les neuf points d'intersection de chacune des droites BC, CA, AB avec *bc*, *ca*, *ab* se compose de l'axe d'homologie et d'une conique. Les côtés homologues se coupant sur l'axe d'homologie, il s'ensuit que la conique passe par les six autres points d'intersection. L'équation de cette conique

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & L^2 + L(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) \\ & \quad + c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

se simplifie considérablement en posant

$$(10) \qquad \frac{y_2y_3z_1 + y_3y_1z_2 + y_1y_2z_3 - 2y_1y_2y_3 - z_1z_2z_3}{(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)} = n.$$

d'où il suit

$$(11) \qquad c_1 = \frac{n}{y_1}, \qquad c_2 = \frac{n}{y_2}, \qquad c_3 = \frac{n}{y_3},$$

par conséquent

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = n\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right),$$

$$c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = n^2\left(\frac{x_2x_3}{y_2y_3} + \frac{x_3x_1}{y_3y_1} + \frac{x_1x_2}{y_1y_2}\right).$$

La droite

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

et la conique

$$c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = 0$$

sont, comme on voit, des polaires du point O par rapport au triangle ABC. Si l'on pose

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & R = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}, \\ & K = \frac{x_2x_3}{y_2y_3} + \frac{x_3x_1}{y_3y_1} + \frac{x_1x_2}{y_1y_2}, \\ & L = nC, \end{aligned} \right.$$

la conique passant par les points d'intersection des côtés non homologues sera représentée par l'équation

$$(13) \qquad C^2 + CR + K = 0.$$

Dans cette équation, on a identiquement

$$(14) \qquad C \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3,$$

où

$$(15) \quad d_1 = \frac{b_1}{n} = \frac{(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)}{y_2 y_3 z_1 + y_3 y_1 z_2 + y_1 y_2 z_3 - 2 y_1 y_2 y_3 - z_1 z_2 z_3}, \quad \cdots$$

Voici encore l'énoncé du théorème corrélatif :

Si deux triangles abc, ABC *sont homologues et si l'on joint chacun des sommets de l'un aux deux sommets non homologues de l'autre, les six droites ainsi obtenues sont tangentes à une seule conique.*

Nous voulons ensuite transformer les résultats obtenus jusqu'ici en introduisant les directions des côtés *bc*, *ca*, *ab*. Soient par A, B, C tracées trois directions

$$(16) \quad x_2 + \lambda x_3 = 0, \qquad x_3 + \mu x_1 = 0, \qquad x_1 + \nu x_2 = 0,$$

parallèles à *bc*, *ca*, *ab*, que nous appellerons, dans ce qui suit, simplement les *directions* λ, μ, ν.

Les quantités λ, μ, ν ne seront pas indépendantes des coordonnées du centre d'homologie. Il existe entre ces quantités une relation que nous nous proposons de chercher.

Pour cela, il faut définir plus exactement les coordonnées trilinéaires, dont nous nous sommes servi jusqu'ici. Prenons comme coordonnées trilinéaires d'un point les longueurs des trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle ABC, de sorte qu'on ait généralement

$$(17)\qquad a_1x_1+b_2x_2+c_3x_3=2\times \text{aire du triangle ABC} = 2\Delta,$$

a, b, c étant les côtés du triangle.

L'équation de la droite à l'infini est alors

$$(18)\qquad ax_1+bx_2+cx_3=0,$$

et, afin que la droite bc soit parallèle à la direction λ, il faut qu'on ait

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda(a_1b-b_2a)-(a_1c-b_3a)=0. \\ \text{De même on trouve} \\ \mu(a_2c-b_3b)-(a_2a-b_1b)=0 \\ \nu(a_3a-b_1c)-(a_3b-b_2c)=0. \end{array}\right.$$

A l'aide de la formule (15) on obtient

$$\frac{1}{y_1}=\frac{(z_2z_3-y_2y_3)(y_1-z_1)}{y_1(y_2y_3z_1+y_3y_1z_2+y_1y_2z_3-2y_1y_2y_3-z_1z_2z_3)}=\frac{a_1}{n},$$

ou

$$a_1=n\left(d_1+\frac{1}{y_1}\right),\qquad \cdots\cdot$$

Aussi l'on a, d'après (15),

$$b_1=n\,d_1,\qquad b_2=n\,d_2\qquad b_3=n\,d_3.$$

de sorte que les équations (19) se réduisent aux suivantes

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda\left(b\,d_1-a\,d_2-\dfrac{b}{y_1}\right)+\left(a\,d_3-c\,d_1-\dfrac{c}{y_1}\right)=0, \\ \mu\left(c\,d_2-b\,d_3+\dfrac{c}{y_2}\right)-\left(b\,d_1-a\,d_2-\dfrac{a}{y_2}\right)=0, \\ \nu\left(a\,d_3-c\,d_1+\dfrac{a}{y_3}\right)+\left(c\,d_2-b\,d_3-\dfrac{b}{y_3}\right)=0, \end{array}\right.$$

d'où il faudra déterminer z_1, z_2, z_3 en fonction de $\lambda, \mu, \nu, y_1, y_2, y_3$.

En résolvant ces trois équations par rapport aux quantités

$$c\,d_2 - b\,d_3,\quad a\,d_3 - c\,d_1,\quad b\,d_1 - a\,d_2,$$

on obtient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&(1+\lambda\mu\nu)(c\,d_2 - b\,d_3)\\
&\quad = \frac{b}{y_3} - \nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right) + \nu\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) - \lambda\mu\nu\frac{c}{y_2},\\
&(1+\lambda\mu\nu)(a\,d_3 - c\,d_1)\\
&\quad = \frac{c}{y_1} - \lambda\left(\frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right) + \lambda\mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) - \lambda\mu\nu\frac{a}{y_3},\\
&(1+\lambda\mu\nu)(b\,d_1 - a\,d_2)\\
&\quad = \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) + \mu\nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right) - \lambda\mu\nu\frac{b}{y_1},
\end{aligned}\right.$$

formules exigeant que $1 + \lambda\mu\nu$ ne s'annule pas. C'est ce cas que nous voulons exclure d'abord.

De la multiplication des équations (21) par a, b, c et de l'addition de ces produits, il résulte

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&(1-\lambda\mu\nu)\left(\frac{1}{a y_1} + \frac{1}{b y_2} + \frac{1}{c y_3}\right)\\
&\quad + \frac{b\lambda - c}{a}\,\mu\left(\frac{1}{b y_2} - \frac{1}{c y_3}\right)\\
&\quad + \frac{c\mu - a}{b}\,\nu\left(\frac{1}{c y_3} + \frac{1}{a y_1}\right)\\
&\quad + \frac{a\nu - b}{c}\,\lambda\left(\frac{1}{a y_1} + \frac{1}{b y_2}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

C'est la relation qui doit exister entre λ, μ, ν, y_1, y_2, y_3, afin qu'il soit possible de tracer des triangles abc homologiques à ABC, tandis que y_1, y_2, y_3 est le centre d'homologie et que les côtés bc, ca, ab sont parallèles à λ, μ, ν.

Si cette équation est satisfaite, les quantités d_1, d_2, d_3 ne sont pas complètement déterminées par les équations (20); de même pour z_1, z_2, z_3. On peut déduire de ces équations des valeurs de d_1, d_2, d_3 renfermant une variable arbitraire.

Nous n'écrirons pas ici ces valeurs; plus tard nous en trouverons de plus simples [*voir* les formules (42)]. Toutefois, il suit de là que les valeurs de z_1, z_2, z_3 renfermeront aussi une quantité variable.

L'interprétation géométrique de ce résultat est fort simple : si les directions λ, μ, ν et le point O sont tels, qu'un triangle *abc* homologique à ABC puisse être trouvé, ayant ses côtés parallèles à λ, μ, ν, O étant le centre d'homologie, il y aura une infinité de triangles jouissant de la même propriété par rapport au même centre d'homologie.

Si l'équation

$$1 + \lambda\mu\nu = 0 \tag{23}$$

est satisfaite, les relations (20) ne pourront pas exister à la fois, à moins qu'un des seconds membres des équations (21) s'annule. La supposition (23) entraîne donc la suivante

$$\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3} - \nu\left(\frac{a}{y_3} - \frac{c}{y_1}\right) + \nu\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) = 0. \tag{24}$$

Examinons maintenant à quelle condition la conique (13) sera un cercle. Si l'on pose identiquement

$$f = G^2 - CR + K,$$

et si u_1, u_2, u_3 sont des valeurs satisfaisant à l'équation (18), les coordonnées v_1, v_2, v_3, qui satisfont à (18) et à la relation

$$v_1\frac{\partial f}{\partial u_1} + v_2\frac{\partial f}{\partial u_2} + v_3\frac{\partial f}{\partial u_3} = 0, \tag{25}$$

à la fois, désigneront une direction conjuguée à la direction du point u_1, u_2, u_3 par rapport à la conique $f = 0$.

Si u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 sont en rapport harmonique avec les points imaginaires cycliques à l'infini, ces directions seront perpendiculaires l'une à l'autre. Cherchons la condition qui doit être satisfaite, afin que ce cas ait lieu. Les coordonnées des points imaginaires cycliques à l'infini sont

$$e^{\pm i\alpha_1}, \quad e^{\pm i\alpha_2}, \quad e^{\pm i\alpha_3},$$

α_1, α_2, α_3 représentant les angles sous lesquels les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les côtés du triangle ABC rencontrent l'axe des X. Si l'origine est choisie à l'intérieur du triangle, on aura

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \pi - \mathrm{A}, \qquad \alpha_1 - \alpha_3 = \pi - \mathrm{B}, \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \pi - \mathrm{C}.$$

Posons maintenant

$$(26) \qquad \begin{cases} u_1 = e^{i\alpha_1} + ke^{-i\alpha_1}, \\ u_2 = e^{i\alpha_2} + ke^{-i\alpha_2}, \\ u_3 = e^{i\alpha_3} + ke^{-i\alpha_3}. \end{cases}$$

De ce qui précède, il suit qu'on aura également

$$(27) \qquad \begin{cases} v_1 = e^{i\alpha_1} - ke^{-i\alpha_1}, \\ v_2 = e^{i\alpha_2} - ke^{-i\alpha_2}, \\ v_3 = e^{i\alpha_3} - ke^{-i\alpha_3}, \end{cases}$$

valeurs qui doivent satisfaire encore à la relation (25).

Or, comme

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \mathrm{C}d_1 + (\mathrm{C}+\mathrm{R})\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right) - \frac{u_1}{y_1^2},$$

où, dans C et R, x_1, x_2, x_3 doivent être remplacées par u_1, u_2, u_3, si par $\mathrm{C}_{\alpha i}$, $\mathrm{C}_{-\alpha i}$ nous désignons les valeurs que C prend, lorsqu'on y remplace x_1, x_2, x_3 par $e^{\alpha_1 i}$, $e^{\alpha_2 i}$, $e^{\alpha_3 i}$; $e^{-\alpha_1 i}$, $e^{-\alpha_2 i}$, $e^{-\alpha_3 i}$, il en résulte

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} &+ v_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} \\ &= \mathrm{C}_{\alpha i}^2 + (\mathrm{C}_{\alpha i} + \mathrm{R}_{\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right) \\ &\quad - k^2\left[\mathrm{C}_{-\alpha i}^2 + (\mathrm{C}_{-\alpha i} + \mathrm{R}_{-\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{-2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{-2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{-2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right)\right], \end{aligned}$$

et les deux membres de cette équation devront s'annuler.

S'ils s'annulent pour toute valeur attribuée à h, la conique (13) sera un cercle. Les conditions nécessaires et suffisantes, afin que les côtés du triangle *abc* coupent les cotés non homologues de ABC en six points concycliques, sont par conséquent

$$C^2_{\alpha t} + (C_{\alpha t} - R_{\alpha t})^2 - \left(\frac{e^{2\alpha_1 t}}{y_1^2} - \frac{e^{2\alpha_2 t}}{y_2^2} + \frac{e^{2\alpha_3 t}}{y_3^2}\right) = 0,$$

$$C^2_{-\alpha t} - (C_{-\alpha t} + R_{-\alpha t})^2 - \left(\frac{e^{-2\alpha_1 t}}{y_1^2} - \frac{e^{-2\alpha_2 t}}{y_2^2} + \frac{e^{-2\alpha_3 t}}{y_3^2}\right) = 0.$$

L'addition et la soustraction de ces équations fournit

$$\begin{aligned}
&d_1\left(d_1 - \frac{1}{y_1}\right)\cos 2\alpha_1 + d_2\left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\cos 2\alpha_2\\
&\quad - d_3\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\cos 2\alpha_3\\
&\quad + \left[d_2 d_3 - \left(d_2 - \frac{1}{y_2}\right)\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\right]\cos(\alpha_2 - \alpha_3)\\
&\quad \left[d_3 d_1 - \left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\left(d_1 \quad \frac{1}{y_1}\right)\right]\cos(\alpha_3 - \alpha_1)\\
&\quad + \left[d_1 d_2 \quad \left(d_1 - \frac{1}{y_1}\right)\left(d_2 - \frac{1}{y_2}\right)\right]\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,
\end{aligned}$$

et une seconde équation qui peut s'obtenir de la dernière en changeant seulement les cosinus en sinus.

Multiplions la première de ces équations par $\sin 2\alpha_1$, la seconde par $\cos 2\alpha_1$, ou bien la première par $\sin 2\alpha_2$, la seconde par $\cos 2\alpha_3$, ... et retranchons chaque fois le second produit du premier. On aura

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&d_2\left(d_2 - \frac{1}{y_2}\right)\sin 2C - d_3\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\sin 2B\\
&\quad - \left[d_2 d_3 - \left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\left(d_3 - \frac{1}{y_3}\right)\right]\sin(C - B)\\
&\quad - \left[d_3 d_1 - \left(d_3 - \frac{1}{y_3}\right)\left(d_1 + \frac{1}{y_2}\right)\right]\sin B\\
&\quad \left[d_1 d_2 + \left(d_1 - \frac{1}{y_1}\right)\left(d_2 - \frac{1}{y_1}\right)\right]\sin C = 0
\end{aligned}\right.$$

et deux autres équations provenant de la précédente par une permutation cyclique de d_1, d_2, d_3 : A, B, C. Ces trois relations ne sont cependant pas indépendantes l'une des autres ; en effet, la multiplication par $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ et l'addition de ces produits fournit une identité.

Enfin, multiplions les équations (28) par bc, ca, ab, et remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} abc \sin 2C &= 2abc \sin C \cos C \\ &= 2ac^2 \sin B \cos C = ac^2[\sin A + \sin(B-C)], \\ abc \sin 2B &= ab^2[\sin A - \sin(B-C)]. \end{aligned}$$

On pourra mettre le résultat sous la forme

$$\begin{aligned} \sin A \Big[& c^2 \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right) \\ & - b^2 \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right)\Big] \\ & - \sin(B-C)\, a^2 \left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Des trois équations ainsi obtenues, homogènes par rapport aux quantités

$$\begin{gathered} a^2 \left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right), \\ b^2 \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right), \\ c^2 \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right), \end{gathered}$$

celles-ci peuvent être tirées à un facteur près, d'où il résulte

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(cd_2 - bd_3 - \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right) \\ & = \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right) \\ & = \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right), \end{aligned} \right.$$

Ce sont les conditions, qui doivent être satisfaites, afin que la conique (13) soit un cercle.

L'introduction des quantités λ, μ, ν dans ces équations au lieu de d_1, d_2, d_3 peut s'effectuer de deux manières assez différentes, dont chacune présente un intérêt particulier.

La première ou la plus directe consiste seulement à porter les valeurs de

$$cd_2 - bd_3, \quad ad_3 - cd_1, \quad bd_1 - ad_2$$

données par (21) en (29), d'où il résulte après quelques réductions

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\left[\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}-\nu\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\nu\lambda\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right]\\ &=\frac{1}{\mu}\left[\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}-\lambda\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)+\lambda\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\right]\\ &=\frac{1}{\nu}\left[\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}-\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)+\mu\nu\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Les quantités λ, μ, ν, y_1, y_2, y_3 devront ainsi satisfaire aux trois équations (22) et (30), qu'on peut cependant encore considérablement simplifier. Pour abréger, posons

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{by_2}+\frac{1}{cy_3}&=ap_1,\\ \frac{1}{cy_3}+\frac{1}{ay_1}&=bp_2,\\ \frac{1}{ay_1}+\frac{1}{by_2}&=cp_3,\end{aligned}\right.$$

et considérons $p_1 : p_2 : p_3$ comme coordonnées d'un point P. Entre le centre d'homologie O et ce point P, il existera un rapport simple que nous exposerons d'abord. On déduit de l'équation (31)

$$\begin{aligned}\frac{1}{ay_1} : \frac{1}{by_2} : \frac{1}{cy_3} &= (-ap_1 + bp_2 + cp_3)\\ &: (ap_1 - bp_2 + cp_3) : (ap_1 + bp_2 - cp_3).\end{aligned}$$

Si O′ ou z_1, z_2, z_3 est le point conjugué isotomique de O par rapport au triangle ABC, on aura

$$y_1 : y_2 : y_2 = \frac{1}{a^2 z_1} : \frac{1}{b^2 z_2} : \frac{1}{c^2 z_3};$$

par conséquent,

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 = {} & \frac{-ap_1 + bp_2 + cp_3}{a} \\ & : \frac{ap_1 - bp_2 + cp_3}{b} : \frac{ap_1 + bp_2 - cp_3}{c}. \end{aligned} \right.$$

Soit P′ le point conjugué isotomique de P et soient P'_1, P'_2, P'_3 les points d'intersection de AP′, BP′, CP′ avec les côtés opposés du triangle ABC. Si l'on trace enfin les droites B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 passant par A, B, C parallèles à BC, CA, AB, le point O′ sera le point d'intersection des droites $A_0P'_1$, $B_0P'_2$, $C_0P'_3$. En effet, les équations de $A_0P'_1$, $B_0P'_2$ sont

$$ax_1(bp_2 - cp_3) + b^2 p_2 x_2 - c^2 p_3 x_3 = 0,$$
$$-a^2 p_1 x_1 - bx_2(cp_3 - ap_1) + c^2 p_3 x_3 = 0,$$

d'où l'on tire des valeurs de x_1, x_2, x_3 égales à celles de z_1, z_2, z_3 dans l'équation (32).

A l'aide de la substitution (31) les relations (22) et (30) se réduisent aux suivantes

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{2}(1 - \lambda\mu\nu)(ap_1 + bp_2 + cp_3) \\ & \quad - p_1\mu(c - b\lambda) - p_2\nu(a - c\mu) - p_3\lambda(b - a\nu) = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(34)\quad \frac{p_1 - \nu p_2 + \nu\lambda p_3}{\lambda} = \frac{p_2 - \lambda p_3 + \mu\nu p_1}{\mu} = \frac{p_3 - \mu p_1 + \mu\nu p_2}{\nu}.$$

En désignant chacune de ces fractions par H, de sorte qu'on ait

$$p_1 - \nu\, p_2 + \nu\lambda\, p_3 = \lambda H,$$
$$p_2 - \lambda\, p_3 + \lambda\mu p_1 = \mu H,$$
$$p_3 - \mu p_1 + \mu\nu\, p_2 = \nu\, H,$$

il devient facile d'exprimer p_1, p_2, p_3 en λ, μ, ν. A cet effet, multiplions la seconde équation par ν et ajoutons à ce produit la première équation. Si l'on pose encore, afin d'abréger,

$$\frac{\mathrm{H}}{1+\lambda\mu\nu}=\rho,$$

on trouvera

$$(35)\qquad p_1=\rho(\lambda+\mu\nu),\qquad p_2=\rho(\mu+\nu\lambda),\qquad p_3=\rho(\nu+\lambda\mu)$$

et enfin, en substituant ces valeurs dans l'équation (33),

$$(36)\qquad a(\lambda-\mu\nu)+b(\mu-\nu\lambda)+c(\nu-\lambda\mu)=0.$$

C'est donc la condition à laquelle λ, μ, ν doivent satisfaire, afin qu'il soit possible de construire des triangles *abc* homologiques à ABC, dont les côtés sont parallèles à λ, μ, ν, tandis que les six points d'intersection des côtés non homologues des deux triangles sont concycliques.

Passons maintenant à la seconde manière de déduire ces résultats des équations (20), (29).

De la première des équations (20) et de la suivante

$$\left(ad_3-cd_1+\frac{a}{y_3}\right)\left(d_3-cad_1-\frac{c}{y_1}\right)$$
$$=\left(bd_1-ad_2+\frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1-ad_2-\frac{a}{y_2}\right),$$

appartenant au système d'équations (29), on conclut

$$bd_1-ad_2+\frac{b}{y_1}=0$$

ou

$$(37)\qquad ad_3-cd_1+\frac{a}{y_3}=-\frac{1}{\lambda}\left(bd_1-ad_2-\frac{a}{y_2}\right).$$

En supposant que la première des équations ait lieu et que λ ait une valeur quelconque, on déduit des systèmes (20), (29),

$$ad_3-cd_1-\frac{c}{y_1}=0$$

et

$$cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2} = 0$$

ou

$$cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3} = 0.$$

L'une et l'autre de ces dernières suppositions rend impossible de trouver des valeurs finies pour y_1, y_2, y_3. Il faudra donc conclure que l'équation (37) doit être satisfaite.

De cette équation et de la première des équations (20) on pourra maintenant tirer les valeurs de $ad_3 - cd_1$, $bd_1 - ad_2$

$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \lambda^2\frac{b}{y_3}\right],$$

$$ad_3 - cd_1 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right) - \frac{c}{y_1} - \lambda^2\frac{a}{y_3}\right].$$

De même on pourra déterminer $cd_2 - bd_3$, $bd_1 - ad_2$ de la seconde des équations (20) et de la relation

$$\left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right)$$
$$= \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right)$$

appartenant au système d'équations (29). On trouvera

$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \mu^2\frac{b}{y_1}\right].$$

De cette manière on obtiendra pour chacune des quantités

$$cd_2 - bd_3,\quad ad_3 - cd_1,\quad bd_1 - ad_2.$$

deux valeurs qui sont

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}
cd_2 - bd_3 &= \frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right) - \frac{b}{y_3} - \mu^2\frac{c}{y_2}\right]\\
&= \frac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right) - \frac{b}{y_3} - \nu^2\frac{c}{y_2}\right],\\
ad_3 - cd_1 &= \frac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \nu^2\frac{a}{y_3}\right]\\
&= \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \lambda^2\frac{a}{y_3}\right],\\
bd_1 - ad_2 &= \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \lambda^2\frac{b}{y_1}\right]\\
&= \frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_2}\right) - \frac{a}{y_3} - \mu^2\frac{b}{y_1}\right],
\end{aligned}\right.$$

et qui permettent d'en déduire encore une troisième. A cet effet, prenons des équations (38) les deux suivantes

$$ad_3 - cd_1 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \lambda^2\frac{a}{y_3}\right],$$

$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \lambda^2\frac{b}{y_1}\right];$$

multiplions la première par b, la seconde par c et ajoutons les produits. En ayant égard aux équations (31), on obtiendra

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
cd_2 - bd_3 &= \frac{bc}{\lambda^2 - 1}(c - b\lambda)(p_3 - \lambda p_2),\\
ad_3 - cd_1 &= \frac{ca}{\mu^2 - 1}(a - c\mu)(p_1 - \mu p_3),\\
bd_1 - ad_2 &= \frac{ab}{\nu^2 - 1}(b - a\nu)(p_2 - \nu p_1).
\end{aligned}\right.$$

Des équations (38) on conclut encore, après quelques réductions

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu(p_3 - \mu p_1 + \mu\nu p_2) &= \nu(p_2 - \nu p_1 + \mu\nu p_3),\\
\nu(p_1 - \nu p_2 + \nu\lambda p_3) &= \lambda(p_3 - \lambda p_2 + \nu\lambda p_1),\\
\lambda(p_2 - \lambda p_3 + \lambda\mu p_1) &= \mu(p_1 - \mu p_3 + \lambda\mu p_2).
\end{aligned}\right.$$

relations qui ne sont pas indépendantes l'une des autres, parce qu'en éliminant p_1, p_2, p_3 on arrive à une identité. De deux quelconques de ces équations, on peut tirer les rapports $p_1 : p_2 : p_3$; on arrive de cette manière à

$$p_1 : p_2 : p_3 = (\lambda + \mu\nu) : (\mu + \nu\lambda) : (\nu + \lambda\mu),$$

c'est-à-dire aux équations (35). A l'aide de ces relations on peut ensuite trouver

$$p_3 - \lambda p_2 = \nu(1 - \lambda^2)v, \qquad \ldots,$$

résultat qui nous permet de mettre les équations (39) sous la forme

$$(41) \qquad \begin{cases} cd_2 - bd_3 = vbc\nu(b\lambda - c), \\ ad_3 - cd_1 = vca\lambda(c\mu - a), \\ bd_1 - ad_2 = vab\mu(a\nu - b), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, d'après une méthode souvent déjà employée, la relation (36) entre λ, μ, ν.

Des formules (41), on peut encore tirer des valeurs de d_1, d_2, d_3 renfermant une quantité indéterminée u, savoir

$$(42) \qquad \begin{cases} d_1 = ua + \dfrac{av}{3}[\lambda(a - c\mu) - \mu(b - av)], \\[2ex] d_2 = ub + \dfrac{bv}{3}[\mu(b - a\nu) - \nu(c - b\lambda)], \\[2ex] d_3 = uc + \dfrac{cv}{3}[\nu(c - b\lambda) - \lambda(a - c\mu)]. \end{cases}$$

L'équation (36) a une signification géométrique assez simple. En effet, soit A' le point d'intersection de la direction λ avec le côté BC, et soient l_b^a, l_c^a les perpendiculaires abaissées du point A' sur AC, AB. On aura

$$\lambda = -\frac{l_b^a}{l_c^a}.$$

D'après l'équation

$$b l_b^a + c l_c^a = 2\Delta,$$

on trouve

$$l_b^a = -\frac{2\lambda\Delta}{c - b\lambda}, \qquad l_c^a = \frac{2\Delta}{c - b\lambda}.$$

De la même manière, on peut exprimer l_c^b, l_a^b, l_a^c, l_b^c en fonction de μ, ν, d'où l'on déduit facilement

$$l_a^b l_a^c + l_b^c l_b^a + l_c^a l_c^b$$
$$= \frac{4\Delta^2}{(b\lambda - c)(c\mu - a)(a\nu - b)}[a(\lambda - \mu\nu) + b(\mu - \nu\lambda) + c(\nu - \lambda\mu)].$$

L'équation (36) exprime, comme on voit, que la fonction

$$l_a^b l_a^c + l_b^c l_b^a + l_c^a l_c^b$$

s'annule. La condition à laquelle les directions λ, μ, ν doivent satisfaire est donc que la somme des produits des deux perpendiculaires abaissées sur chacun des côtés du triangle ABC des deux points d'intersection de ces directions avec les deux autres côtés s'annule. Il est à remarquer qu'il faut regarder le produit de deux perpendiculaires comme négatif, si elles tombent sur le même côté, en sens contraire. Il s'ensuit que les points A′, B′, C′ ne peuvent jamais être situés sur les côtés eux-mêmes tous à la fois, ni sur les prolongements de ces côtés tracés dans un même sens en parcourant la périphérie du triangle d'une manière convenue.

On peut demander de déterminer y_1, y_2, y_3, si λ, μ, ν sont donnés, et inversement. Le premier problème se résout facilement à l'aide des formules (31), (35). On trouve ainsi

$$\frac{1}{a y_1} = c(b\mu + c\nu - a\mu\nu) = c\lambda(b\nu + c\mu - a).$$

par conséquent,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= a(b\mu + c\nu - a\mu\nu) : b(c\nu + a\lambda - b\nu\lambda) \\ &\qquad : c(a\lambda + b\mu - c\mu\nu) \\ &= a\lambda(b\nu + c\mu - a) : b\mu(c\lambda + a\nu - b) \\ &\qquad : c\nu(a\mu + b\lambda - c). \end{aligned}\right.$$

Afin de trouver la solution du problème inverse, nous remarquons que, d'après (35), on a

$$(44)\qquad \lambda^2 + \lambda\mu\nu = \lambda\,\frac{p_1}{v} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - \alpha}}{2v};$$

si, pour abréger, nous posons

$$4\lambda\mu\nu v^2 = \alpha.$$

La multiplication des valeurs de λ, μ, ν ainsi obtenues fournit

$$v = \frac{(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - \alpha})(p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - \alpha})(p_3 \pm \sqrt{p_3^2 - \alpha})}{2\alpha},$$

et ensuite, d'après (44),

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{(p_2 \mp \sqrt{p_2^2 - \alpha})(p_3 \mp \sqrt{p_3^2 - \alpha})}{\alpha}, \\ \mu &= \frac{(p_3 \mp \sqrt{p_3^2 - \alpha})(p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - \alpha})}{\alpha}, \\ \nu &= \frac{(p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - \alpha})(p_2 \mp \sqrt{p_2^2 - \alpha})}{\alpha}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que λ, μ, ν sont exprimées en fonction d'une seule variable α, laquelle, elle-même, est déterminée par l'équation

$$(46)\qquad a\sqrt{p_1^2 - \alpha} + b\sqrt{p_2^2 - \alpha} + c\sqrt{p_3^2 - \alpha} = 0,$$

qui s'obtient en substituant les valeurs de λ, μ, ν dans la formule (36).

On en peut conclure qu'à un système déterminé de valeurs λ, μ, ν, un seul point y_1, y_2, y_3 correspond, tandis que à un système déterminé de valeurs de y_1, y_2, y_3 plusieurs systèmes de directions λ, μ, ν correspondent.

L'équation (36) peut être mise sous la forme suivante :

$$a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu\nu}\right) + b\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu\lambda}\right) + c\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\lambda\mu}\right) = 0,$$

d'où il suit que, si un système de valeurs de λ, μ, ν satisfait à l'équation (36), il en est de même des valeurs $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

Soit y'_1, y'_2, y'_3 le centre d'homologie correspondant aux directions $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

On aura, d'après la formule (43),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y'_1} : \frac{1}{y'_2} : \frac{1}{y'_3} \\
&\quad = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{b}{\nu} + \frac{c}{\mu} - a\right) : \frac{b}{\mu}\left(\frac{c}{\lambda} + \frac{a}{\nu} - b\right) : \frac{c}{\nu}\left(\frac{a}{\mu} + \frac{b}{\lambda} - c\right) \\
&\quad = a(b\mu + c\nu - a\mu\nu) : b(c\nu + a\lambda - b\nu\lambda) : c(a\lambda + b\mu - c\lambda\mu) \\
&\quad = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3},
\end{aligned}$$

ce qui montre que les points y_1, y_2, y_3 et y'_1, y'_2, y'_3 coïncident. De là ce théorème :

Si l'on trace des triangles abc jouissant des propriétés suivantes :

1° *Les côtés sont homologiques à un triangle fixe* ABC, *le point* O *étant le centre d'homologie;*

2° *Ils sont parallèles aux directions* λ, μ, ν;

3° *Ces côtés déterminent sur les côtés non homologues du triangle* ABC *six points concycliques; tout triangle jouissant de la première propriété et dont les côtés sont parallèles aux conjugués isogonaux des directions* λ, μ, ν *par rapport au triangle* ABC, *jouira aussi de la troisième.*

Des simplifications considérables s'obtiennent si l'on exprime les quantités λ, μ, ν en fonction des angles sous lesquels les directions désignées par λ, μ, ν rencontrent les côtés du triangle ABC.

Soit φ_1 l'angle entre la direction λ et le côté AB, qu'on regarde comme positif, si le sens de la rotation du côté AB vers λ coïncide avec celui de la rotation qui fait tourner AC vers AB. Désignons de même par φ_2, φ_3 les angles entre BC, CA et les directions μ, ν. On aura

$$(47)\qquad \lambda = \frac{\sin(\varphi_1 + A)}{\sin\varphi_1}, \qquad \mu = \frac{\sin(\varphi_2 + B)}{\sin\varphi_2}, \qquad \nu = \frac{\sin(\varphi_3 + C)}{\sin\varphi_3}.$$

Substituons ces valeurs prises sous la forme

$$\lambda = \cos A + \cot\varphi_1 \sin A, \qquad \mu = \cos B + \cot\varphi_2 \sin B, \qquad \ldots$$

dans l'équation (36). Après quelques réductions, on obtiendra

$$\cot\varphi_2 \cot\varphi_3 + \cot\varphi_3 \cot\varphi_1 + \cot\varphi_1 \cot\varphi_2 = 1,$$

d'où il suit facilement

$$(48)\qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = m\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

Nous parvenons ainsi à ce théorème intéressant :

Si trois directions λ, μ, ν *sont telles que la somme de leurs inclinaisons sur les côtés d'un triangle* ABC *(ces angles étant pris dans un sens convenu) soit un multiple de* π, *il sera possible de tracer des triangles homologiques au triangle* ABC *par rapport à un centre d'homologie déterminé, ayant leurs côtés parallèles aux directions* λ, μ, ν, *tandis que ces côtés coupent les côtés non homologues de* ABC *en six points concycliques.*

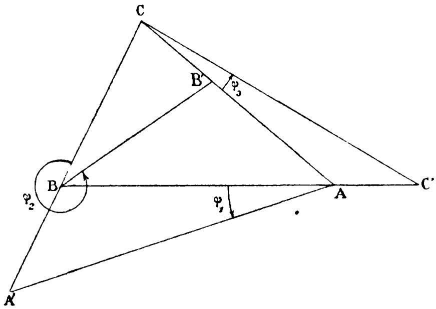
Par les deux équations (36), (48) exprimant la même condition, on est conduit à ce théorème :

Si, sur les trois côtés BC, CA, AB *d'un triangle ou* *sur leurs prolongements, trois points* A', B', C' *sont pris tels que la somme des angles* BAA', CBB', ACC', *pris dans un sens convenu, soit un multiple de* π, *la somme des produits des deux perpendiculaires abaissées de* B', C' *sur* BC, *de* C', A' *sur* CA *et de* A', B' *sur* AB *devra s'annuler.*

Voici une démonstration directe de ce théorème : Soit (*fig.* 2)

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi.$$

Fig. 2.



On trouve facilement

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{BA}' &= \frac{c \sin\varphi_1}{\sin(\mathrm{B} - \varphi_1)},\\
\mathrm{CB}' &= -\frac{a \sin\varphi_2}{\sin(\mathrm{C} - \varphi_2)},\\
\mathrm{AC}' &= \frac{b \sin\varphi_3}{\sin(\mathrm{A} - \varphi_3)},\\
\mathrm{CA}' &= \frac{b \sin(\mathrm{A} + \varphi_1)}{\sin(\mathrm{B} - \varphi_1)},\\
\mathrm{AB}' &= -\frac{c \sin(\mathrm{B} + \varphi_2)}{\sin(\mathrm{C} - \varphi_2)},\\
\mathrm{BC}' &= \frac{a \sin(\mathrm{C} + \varphi_3)}{\sin(\mathrm{A} - \varphi_3)}.
\end{aligned}\right.$$

Or, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle

ABC, on aura

$$\frac{4R^2}{abc}(l_a^b l_a^c + l_b^c l_b^a + l_c^a l_c^b) = \frac{BC'.CB'}{a} + \frac{CA'.AC'}{b} + \frac{AB'.BA'}{c}.$$

Dans le second membre de cette équation, substituons les valeurs de BA′, CB′, ... Après la réduction de chacune des fractions au dénominateur commun,

$$\sin(\varphi_1 - B)\sin(\varphi_2 - C)\sin(\varphi_3 - A),$$

on obtient comme numérateurs

$$a\sin(B - \varphi_1)\sin\varphi_2\sin(C + \varphi_3)$$

et deux autres provenant de la précédente par une permutation cyclique de a, b, c; φ_1, φ_2, φ_3. Il est d'ailleurs facile de démontrer que la relation

$$\begin{aligned} a\sin(B - \varphi_1)\sin\varphi_2\sin(C+\varphi_3) \\ = \frac{R}{4}\cos(m+1)\pi[\cos 2C - \cos 2B \\ + \cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_3 - \cos 2(A+\varphi_1) \\ + \cos 2(B+\varphi_2) - \cos 2(C-\varphi_2) + \cos 2(A-\varphi_3)] \end{aligned}$$

a lieu. Il s'ensuit que la somme des trois numérateurs s'annule, ce qui démontre le théorème.

Les valeurs (43) de y_1, y_2, y_3 se changent par l'introduction de φ_1, φ_2, φ_3 en

$$(50)\qquad \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \sin\varphi_1\sin(A+\varphi_1) : \sin\varphi_2\sin(B+\varphi_2) : \sin\varphi_3\sin(C+\varphi_3).$$

Afin de déduire de ces équations φ_1, φ_2, φ_3, les coordonnées y_1, y_2, y_3 étant données, posons

$$\sin\varphi_1\sin(A+\varphi_1) = -\frac{m}{2y_1},$$

$$\sin\varphi_2\sin(B+\varphi_2) = -\frac{m}{2y_2},$$

$$\sin\varphi_3\sin(C+\varphi_3) = -\frac{m}{2y_3},$$

ou

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \cos(2\varphi_1+A) &= \cos A + \frac{m}{y_1},\\ \cos(2\varphi_2+B) &= \cos B + \frac{m}{y_2},\\ \cos(2\varphi_3+C) &= \cos C + \frac{m}{y_3},\end{aligned}\right.$$

équations par lesquelles m est facilement déterminé. En effet, on a

$$\begin{aligned} &2(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+A+B+C\\ &\quad = \arccos\left(\cos A+\frac{m}{y_1}\right)+\arccos\left(\cos B+\frac{m}{y_2}\right)\\ &\qquad\qquad +\arccos\left(\cos C+\frac{m}{y_3}\right)=(2m+1)\pi.\end{aligned}$$

En prenant le cosinus des deux membres de la dernière équation, on arrive, après division par m, à l'équation (52)

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{m^2}{y_1y_2y_3}+\frac{m}{2}\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}-\frac{1}{y_3^2}+2\frac{\cos A}{y_2y_3}+2\frac{\cos B}{y_3y_1}+2\frac{\cos C}{y_1y_2}\right)\\ &\qquad +\frac{\sin B\sin C}{y_1}+\frac{\sin C\sin A}{y_2}+\frac{\sin A\sin B}{y_3}=0.\end{aligned}\right.$$

La valeur $m=0$ donne

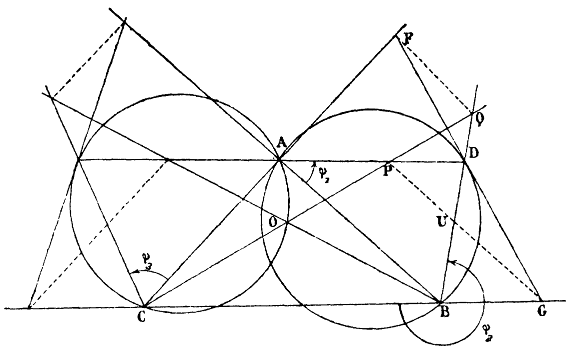
$$\varphi_1=k\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1=k\pi-A;$$

cela veut dire que AA′ coïncide avec AC ou avec AB. De même BB′, CC′ coïncideront avec AB, BC ou avec BC, CA respectivement. C'est un cas particulier que nous considérons plus tard.

De l'équation (52) on tire ensuite pour m deux valeurs, dont chacune fournit d'après (51) deux valeurs de φ_1, φ_2, φ_3. En général donc à un seul système de valeurs pour y_1, y_2, y_3 quatre directions λ, μ, ν correspondent, qu'on pourra réunir de plusieurs manières à des systèmes de directions λ, μ, ν.

La construction suivante peut servir à déterminer le centre d'homologie O, les directions λ, μ, ν étant données par AA′, BB′, CC′. Soit D (*fig.* 3) le point d'inter-

Fig. 3.



section des droites AA′, BB′ et DG la tangente en D au cercle circonscrit au triangle ABD. Cette tangente coupe BC en G, AC en F. Par ces points G, F traçons des droites parallèles à AB rencontrant AD, BD en P, Q. Je dis que le point O est situé sur CP ou CQ. En effet, les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite CP sur BC, AC sont proportionnelles à

$$\mathrm{PG}\sin B, \qquad \mathrm{AP}\sin(\varphi_1 + A)$$

ou à

$$-\,\mathrm{DG}\sin(\varphi_2 + B)\sin B, \qquad \mathrm{AP}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + A).$$

Or, comme PG est parallèle à AB, si U est le point d'intersection de BD et PG, on aura

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = \mathrm{BU} : \mathrm{UD},$$

et ensuite

$$\mathrm{BU} : \mathrm{UG} = \sin B : -\sin\varphi_2 ;$$

par conséquent,

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = \mathrm{UG}\sin B : -\,\mathrm{UD}\sin\varphi_2.$$

D'ailleurs la similitude des triangles UDG, PDG donne

$$UG : UD = DG : DP,$$

de sorte qu'on obtient

$$AP : PD = DG \sin B : -PD \sin\varphi_2$$

ou

$$AP : DG = \sin B : -\sin\varphi_2.$$

Enfin le rapport des deux perpendiculaires abaissées d'un point de la droite CP sur BC, AC devient

$$\sin\varphi_2 \sin(\varphi_2 + B) : \sin\varphi_1 \sin(\varphi_1 + A).$$

On trouve le même rapport pour les perpendiculaires abaissées du point Q sur BC, AC, d'où il suit que les points C, P, Q sont sur une même ligne droite passant par O. En partant de BB′, CC′ on pourra trouver une seconde droite, sur laquelle O devra être situé.

Nous passons maintenant à la considération de quelques cas particuliers :

1° $\varphi_1 = B$, $\varphi_2 = C$, $\varphi_3 = A$ valeurs qui satisfont à l'équation (48); les directions λ, μ, ν sont maintenant parallèles à BC, CA, AB. On trouve

$$\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \sin B \sin C : \sin C \sin A : \sin A \sin B,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 = a : b : c,$$

ce qui veut dire que le centre d'homologie coïncide avec le point de Lemoine. Nous sommes arrivés ainsi au théorème connu de M. Lemoine.

2° $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = A$, $\varphi_3 = B$. Les directions λ, μ, ν sont antiparallèles à BC, CA, AB.

On trouvera que le centre d'homologie coïncide de nouveau avec le point de Lemoine. On a donc ce théorème :

Si l'on trace des triangles abc homologiques à un *triangle donné* ABC, *le point de Lemoine du dernier étant le centre d'homologie et les côtés de abc étant antiparallèles à* BC, CA, AB, *les points d'intersection des côtés non homologues des triangles abc*, ABC *seront concycliques.* (*A suivre.*)