NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. BOULANGER

Note sur les surfaces à génératrice circulaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 159-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__159_0>

NOTE SUR LES SURFACES A GÉNÉRATRICE CIRCULAIRE;

PAR M. A. BOULANGER,
Agrégé de l'Université.

On se propose de déterminer les surfaces à génératrice circulaire telles que les plans tangents tout le long de chaque génératrice enveloppent un cône.

Considérons, avec M. Demartres (*Annales de l'École Normale*, 1885), le trièdre formé par l'axe OZ du cercle qui engendre la surface, et par deux diamètres rectangulaires OX et OY invariablement liés au plan de ce cercle. Soient ξ, η, ζ et p, q, r les composantes, par rapport à ces axes, de la vitesse de l'origine O et de la rotation instantanée du trièdre autour du point O, dans la génération de la surface.

Les projections du déplacement d'un point, dont les coordonnées sont x, y, z, relativement aux axes mobiles, sont

$$dx + (\xi + qz - ry)\,du,$$
$$dy + (\eta + rx - pz)\,du,$$
$$dz + (\zeta + py - qx)\,du,$$

u désignant, je suppose, l'arc de trajectoire du point O.

Le cercle générateur étant dans le plan des xy, les coordonnées d'un de ses points sont exprimables par les formules

$$x = \mathrm{R}\cos v, \qquad y = \mathrm{R}\sin v, \qquad z = 0,$$

où R est une fonction de u, et où v est la variable qui détermine un point sur chaque cercle. En tenant compte de ces valeurs de x, y, z, on aura pour les projections du déplacement

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}\cos v\,du - (\mathrm{N}\,du + \mathrm{R}\,dv)\sin v,\\ \mathrm{M}\sin v\,du + (\mathrm{N}\,du + \mathrm{R}\,dv)\cos v,\\ \mathrm{P}\,du,\end{array}\right.$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{d\mathrm{R}}{du} + \xi\cos v + \eta\sin v,\\ \mathrm{N} &= r\mathrm{R} + \eta\cos v - \xi\sin v,\\ \mathrm{P} &= \zeta + p\mathrm{R}\sin v - q\mathrm{R}\cos v.\end{aligned}$$

Le plan tangent en un point de la surface contenant la tangente à la génératrice circulaire qui passe par ce point, son équation par rapport aux axes mobiles est de la forme

$$\mathrm{X}\cos v + \mathrm{Y}\sin v - \mathrm{R} = \lambda\mathrm{Z};$$

déterminons λ de manière que tout déplacement (1) soit situé dans ce plan, et nous aurons

$$\mathrm{M} = \lambda\mathrm{P}.$$

L'équation du plan tangent est donc

$$\begin{aligned} &[\mathrm{X}\cos v + \mathrm{Y}\sin v - \mathrm{R}][\zeta + p\mathrm{R}\sin v - q\mathrm{R}\cos v]\\ &\quad = \left[\frac{d\mathrm{R}}{du} + \xi\cos v + \eta\sin v\right]\mathrm{Z},\end{aligned}$$

ou en posant

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = t,$$

$$\begin{aligned} &[(1-t^2)\mathrm{X} + 2t\mathrm{Y} - (1+t^2)\mathrm{R}][\zeta(1+t^2) + 2p\mathrm{R}t - q\mathrm{R}(1-t^2)]\\ &\quad = (1+t^2)\left[\frac{d\mathrm{R}}{du}(1+t^2) + \zeta(1-t^2) + 2t\eta\right]\mathrm{Z}.\end{aligned}$$

Pour que ce plan passe par un point fixe, quel que soit le point sur la génératrice circulaire, c'est-à-dire quel que soit t, il faut et il suffit qu'il existe un point dont les coordonnées X, Y, Z annulent les coefficients de cette équation du quatrième degré en t. On obtient ainsi les relations

$$(X-R)(\zeta - qR) = \left(\frac{dR}{du} + \xi\right) Z,$$

$$-(X+R)(\zeta + qR) = \left(\frac{dR}{du} - \xi\right) Z,$$

$$Y(\zeta - qR) + pR(X-R) = \eta Z,$$

$$Y(\zeta + qR) - pR(X+R) = \eta Z,$$

$$(X-R)(\zeta + qR) - (X+R)(\zeta - qR) + 4pRY = 2\frac{dR}{du} Z.$$

Ces équations se réduisent aux suivantes, par voie d'addition et soustraction,

$$(2) \qquad \begin{cases} -R(\zeta + qX) = \dfrac{dR}{du} Z, \\ X\zeta + qR^2 = \xi Z, \\ Y\zeta - pR^2 = \eta Z, \end{cases}$$

$$(pX - qY) R = 0,$$

$$-R(\zeta - qX) + 2RpY = Z\frac{dR}{du}.$$

Eu égard à la première relation, la dernière se simplifie, et comme R n'est pas identiquement nul, nous aurons à adjoindre aux trois premières relations (2) les deux suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} pX - qY = 0, \\ qX + pY = 0. \end{cases}$$

On ne peut satisfaire par des valeurs réelles à ces deux relations (3) que de deux manières, soit en posant $X = 0$, $Y = 0$; soit en posant $p = 0$, $q = 0$.

1° Si $X = 0$, $Y = 0$, le sommet du cône est sur l'axe du cercle. Ce cône est donc de révolution; par suite, les génératrices circulaires sont lignes de courbure de la surface, et celle-ci est une enveloppe de sphères.

Le sommet du cône a pour cote

$$Z = -\frac{R}{\dfrac{dR}{du}}\zeta;$$

le déplacement et la déformation du cercle sont assujettis aux relations

$$\xi\zeta = -qR\frac{dR}{du},$$

$$\eta\zeta = -pR\frac{dR}{du}.$$

2° Si $p = 0$, $q = 0$, la rotation instantanée du trièdre a constamment lieu autour de l'axe du cercle, et, comme elle déplace le cercle sur lui-même, le mouvement élémentaire du cercle se réduit à une translation. Le plan du cercle se meut parallèlement à lui-même.

Les trois relations (2) donnent pour coordonnées du sommet du cône

$$X = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\xi,$$

$$Y = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\eta,$$

$$Z = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\zeta.$$

Ainsi *les seules surfaces cerclées telles que les plans tangents en tous les points d'une génératrice circulaire quelconque enveloppent un cône sont :*

1° *Les surfaces enveloppes de sphères;*

2° *Les surfaces engendrées par un cercle de rayon variable qui se déplace parallèlement à un plan fixe* (surfaces étudiées par M. Astor).

Pour obtenir le sommet du cône dans chaque position de la génératrice, on remarquera que, la variable u étant l'arc de trajectoire du centre du cercle, ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs de la tangente à cette trajectoire. Dès lors, portons sur la tangente à la trajectoire du centre, dans le sens des arcs (u) décroissants, un segment $\overline{OS}$ égal à $\dfrac{R}{\dfrac{dR}{du}}$; si l'on a affaire à une surface de M. Astor, le point S est le sommet du cône; si l'on a affaire à une enveloppe de sphères, le sommet du cône est la projection du point S sur l'axe du cercle.