NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOLENBROCH

Sur quelques propriétés du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 179-199

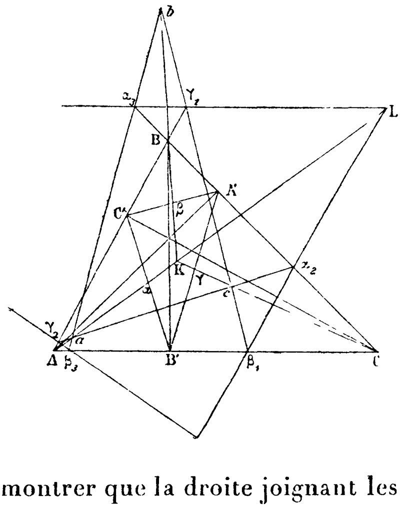
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__179_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE (¹);

PAR M. MOLENBROCH.

Démonstration géométrique (*fig.* 4). — Soient A′B′C′ le triangle orthocentrique de ABC, K le point de Lemoine. Si ab, bc sont parallèles à A′B′, B′C′, il faut

Fig. 4.



d'abord démontrer que la droite joignant les points a et c est parallèle à A′C′. Les points d'intersection des côtés des triangles abc, ABC sont désignés, comme dans la *fig.* 1, par α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2.

Les perpendiculaires abaissées du point b sur BC, AB sont proportionnelles à a, c. Les angles $b\gamma_1 A$,

---

(¹) *Voir* même Tome, p. 121.

$b\alpha_3 C$ étant les suppléments de C, A, on aura

$$\gamma_1 b : \alpha_3 b = \frac{c}{\sin C} : \frac{a}{\sin A},$$

par conséquent

$$\gamma_1 b = \alpha_3 b$$

Or, comme

$$\sphericalangle b\beta_3\beta_1 = \sphericalangle b\beta_1\beta_3 - \sphericalangle B,$$

on aura

$$b\beta_3 = b\beta_1.$$

On peut en conclure

$$\gamma_1\alpha_3 \parallel AC$$

Si α, β, γ sont les milieux de B'C', C'A', A'B', on aura

$$\beta\alpha \parallel A'B' \parallel ab \quad \text{et} \quad \beta\gamma \parallel B'C' \parallel bc.$$

par conséquent

$$\frac{Ka}{K\alpha} = \frac{Kb}{K\beta} = \frac{Kc}{K\gamma} \qquad \text{ou} \qquad ac \parallel \alpha\gamma \parallel A'C'.$$

En outre, $\alpha_2\beta_1$ est parallèle à AB. En prolongeant $\gamma_1\alpha_3$, $\alpha_2\beta_1$ on obtient un parallélogramme $A\gamma_1 L\beta_1$ dont $\beta_1\gamma_1$ est une diagonale. Puisque $\beta_1\gamma_1 \parallel B'C'$ et puisque AK divise la droite B'C' en deux parties égales, il s'ensuit que AK passera par le milieu de $\beta_1\gamma_1$, c'est-à-dire que AK est la seconde diagonale du parallélogramme $A\gamma_1 L\beta_1$. AK devra donc passer par L. Les trois droites $\gamma_1\alpha_3$, $\alpha_2\beta_1$, $\beta_3\gamma_2$ prolongées seront ainsi les côtés d'un triangle homologique à ABC, K étant le centre d'homologie. Selon le théorème de M. Lemoine, il faut que ces trois droites rencontrent les côtés du triangle ABC en six points concycliques.

3° $\varphi_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi - B}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi - C}{2}$, ce qui veut dire que les directions λ, μ, ν sont les bissectrices des angles extérieurs du triangle ABC. On trouve alors

$$\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \cos^2\frac{A}{2} : \cos^2\frac{B}{2} : \cos^2\frac{C}{2},$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{a(s-a)} : \frac{1}{b(s-b)} : \frac{1}{c(s-c)}.$$

Le centre d'homologie coïncide donc avec le point de concours des trois droites joignant les sommets du triangle ABC aux points de contact des côtés opposés du triangle avec le cercle inscrit. D'où ce théorème :

Si l'on trace un triangle abc homologique au triangle donné ABC, *le point de concours des trois droites joignant les sommets* A, B, C *aux points où les côtés* BC, CA, AB *touchent le cercle inscrit étant le centre d'homologie et les côtés de abc étant parallèles aux bissectrices des angles extérieurs de* ABC, *les six points d'intersection des côtés non homologues des deux triangles seront concycliques.*

Démonstration géométrique (*fig.* 5). — Soient A', B', C' les points de contact sur les droites BC, CA, AB mentionnées dans l'énoncé de la proposition, O le centre d'homologie, c'est-à-dire le point de concours des droites AA', BB', CC'; soient $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ les bissectrices des angles extérieurs du triangle ABC. Nous voulons démontrer d'abord que, *ca*, *ab* étant parallèles à $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, *bc* doit être parallèle à $\beta\gamma$.

Traçons C'A', A'B', B'C' et joignons A, B, C au centre I du cercle inscrit au triangle ABC. On aura, comme $ca \perp BI$ et $C'A' \perp BI$, $ca \parallel C'A'$. De même $ab \parallel A'B'$, d'où il suit

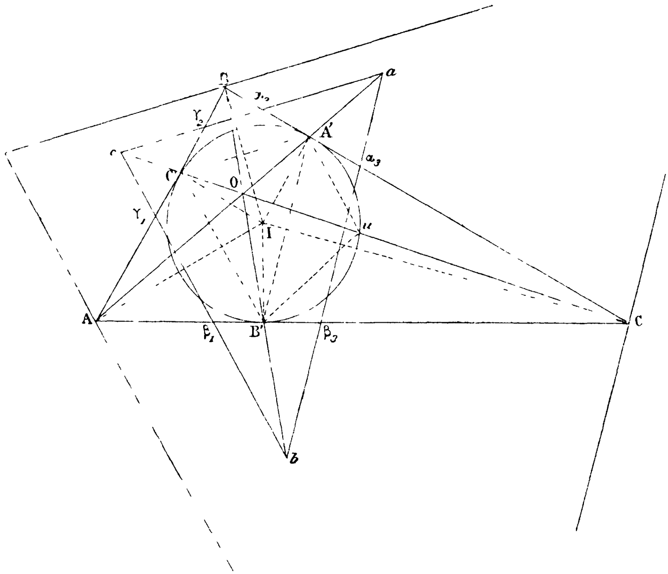
$$\frac{Oc}{OC'} = \frac{Oa}{OA'} = \frac{Ob}{OB'},$$

c'est-à-dire

$$cb \parallel C'B'.$$

Puisque BI, AI sont perpendiculaires à $\gamma_2\alpha_2$, $\beta_1\gamma_1$ aux milieux de ces droites, il faudra que le point I soit

Fig. 5.



le centre du cercle passant par les six points α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2. Il reste à démontrer que $I\gamma_1 = I\gamma_2$ ou bien, comme $IC' \perp AB$, $\gamma_2 C' = \gamma_1 C'$.

Soit U le point d'intersection de CC' avec le cercle inscrit. On aura

$$\sphericalangle \gamma_2 c C' = \sphericalangle U C' A' \quad \text{et} \quad \sphericalangle c \gamma_2 C' = \sphericalangle \gamma_2 C' A' = \sphericalangle A' U C',$$

c'est-à-dire

$$\Delta c \gamma_2 C' \sim \Delta C' A' U,$$

d'où il suit

$$\gamma_2 C' : c C' = A' U : A' C'.$$

De même on aura

$$\Delta C' \gamma_1 c \sim \Delta C' B' U,$$

d'où

$$\gamma_1 C' : c C' = B'U : B'C'.$$

Enfin, comme les triangles A'UC, B'UC sont semblables à A'C'C, B'C'C, on obtient

$$A'U : A'C' = A'C : CC' = B'C : CC' = B'U : B'C',$$

d'où l'on peut conclure que l'équation $\gamma_1 C' = \gamma_2 C'$ a lieu.

4° $\varphi_1 = -\frac{A}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{B}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi - C}{2}$, ce qui signifie que les directions λ, μ sont les bissectrices des angles A, B et que ν est la bissectrice de l'angle extérieur à C du triangle ABC. On trouvera maintenant

$$y_1 : y_2 : y_3 = a(s-b) : b(s-a) : -cs.$$

Le centre d'homologie coïncide donc avec le point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés avec le cercle exinscrit au côté c du triangle ABC. On obtient ainsi un théorème analogue au précédent.

5° $\varphi_1 = -A$, $\varphi_2 = -B$, $\varphi_3 = -C$, c'est-à-dire $\lambda = \mu = \nu = 0$. — D'après les formules générales, y_1, y_2, y_3 ne sont pas déterminés. Si l'on retourne aux formules (20) on trouve

$$cd_2 - bd_3 = \frac{b}{y_3}, \qquad ad_3 - cd_1 = \frac{c}{y_1}, \qquad bd_1 - ad_2 = \frac{a}{y_2},$$

valeurs qui satisfont toutefois à la condition (29). Il en résulte la relation

$$\frac{1}{ay_1} + \frac{1}{by_2} + \frac{1}{cy_3} = 0,$$

qui prouve que le centre d'homologie doit appartenir à la conique polaire du centre de gravité du triangle ABC par rapport à ce triangle. Tout point de cette conique pourra servir de centre d'homologie.

Nous voulons encore examiner quelques hypothèses plus générales et d'abord traiter le cas où les directions λ, μ, ν sont concourantes, c'est-à-dire où les équations (23) et (24) sont satisfaites.

Le premier mode de résolution des équations (20) et (29) ne peut pas servir maintenant; le second subsiste, excepté dans le cas où une des quantités λ^2, μ^2, ν^2 est égale à l'unité. Si nous excluons cette dernière supposition nous aurons les relations (23), (24) et (36), savoir

$$(53)\qquad \begin{gathered} 1+\lambda\mu\nu=0, \\ p_1-\nu p_2+\nu\lambda p_3=0, \\ a(\lambda-\mu\nu)+b(\mu-\nu\lambda)+c(\nu-\lambda\mu)=0, \end{gathered}$$

auxquelles se joint encore, d'après (40), cette nouvelle formule

$$(54)\qquad p_3-\lambda p_2+\nu\lambda p_3=0.$$

Appelons S le point de concours des directions λ, μ, ν et soient x_1, x_3, x_3 les coordonnées de ce point S. On aura

$$\lambda=-\frac{x_2}{x_3},\qquad \mu=-\frac{x_3}{x_1},\qquad \nu=-\frac{x_1}{x_2}.$$

Ces coordonnées satisferont aux trois équations

$$(55)\qquad a x_1(x_2^2+x_3^2)+b x_2(x_3^2+x_1^2)+c x_3(x_1^2+x_2^2)=0,$$

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1x_2x_3+p_2x_3x_1-p_3x_1x_2&=0, \\ p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3&=0. \end{aligned}\right.$$

D'après l'équation (55) le lieu du point S est une courbe du troisième degré passant par les sommets du triangle.

En éliminant entre (55) et (56) x_1, x_2, x_3, on obtient le lieu du point $p_1 : p_2 : p_3$. Des équations (56) on déduit facilement

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 + \sqrt{P}}{2 p_1 p_2},$$

si pour abréger on a posé

$$P = p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 - 2p_2^2 p_3^2 - 2p_3^2 p_1^2 - 2p_1^2 p_2^2$$

Par conséquent

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 - \sqrt{P}}{2 p_1 p_2} \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_2}.$$

Remarquons encore que l'équation (55) peut être mise sous la forme

$$a\left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + b\left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) + c\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = 0$$

On voit immédiatement que l'équation du lieu du point P sera

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} ap_1(p_2^2 + p_3^2 - p_1^2) + bp_2(p_3^2 + p_1^2 - p_2^2) \\ \qquad\qquad + cp_3(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire une courbe du troisième degré. En portant dans cette équation les valeurs de p_1, p_2, p_3 données par (31), on trouvera aussi le lieu du centre d'homologie O. C'est une courbe du sixième degré dont l'équation est assez compliquée.

La construction générale peut servir à trouver le centre d'homologie, les directions λ, μ, ν étant données. Les équations (53) et (54) nous permettent d'arriver à une autre construction et de résoudre en même temps le problème de déterminer λ, μ, ν en regardant y_1, y_2, y_3 comme données.

Remarquons d'abord que, d'après ce qui précède, il est toujours possible de construire le point O ou y_1, y_2, y_3, connaissant le point P ou p_1, p_2, p_3 et inversement.

Les équations (56) montrent que le point S est un des points d'intersection de la conique polaire du point P par rapport au triangle ABC et de la droite polaire du point P' conjugué isogonal de P. La droite polaire d'un point s'obtient par une construction assez connue. Afin de construire la conique polaire de P, il suffira de remarquer qu'elle passe par les sommets du triangle ABC et que les équations des tangentes en ces points sont

$$p_2 x_3 + p_3 x_2 = 0, \qquad p_3 x_1 + p_1 x_3 = 0, \qquad p_1 x_2 + p_2 x_1 = 0.$$

Or, comme l'équation de la polaire du point P est

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0,$$

il suit que ces tangentes sont les droites joignant les sommets A, B, C aux points d'intersection de la droite polaire de P avec les côtés du triangle ABC.

A chaque centre d'homologie il ne correspond, par conséquent, que deux systèmes de valeurs de λ, μ, ν.

Si, au contraire, λ, μ, ν ou le point $S(x_1, x_2, x_3)$ sont donnés, le point P dont les coordonnées sont proportionnelles à p_1, p_2, p_3 se trouve facilement de la manière suivante. D'après (56) ce point P est le point d'intersection des droites polaires par rapport au triangle ABC des deux points

$$x_1 : x_2 : x_3 \text{ ou S} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

Le second point est le conjugué isogonal du point S par rapport au triangle ABC.

Il ne nous reste à considérer que le cas où les deux équations

$$1 + \lambda\mu\nu = 0, \qquad \lambda = \pm 1$$

où

$$\lambda = \pm 1, \qquad \mu\nu = \mp 1$$

sont satisfaites à la fois, puisque alors nous ne pouvons nous servir d'aucune des méthodes exposées antérieurement pour résoudre le système d'équations (20) et (29).

Si, dans ce cas, nous retournons à ces équations, on a, au lieu de la relation (37) et de la première des équations (20),

$$ad_3 - cd_1 - \frac{a}{y_3} = \pm\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right),$$
$$ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1} = \mp\left(bd_1 - ad_2 - \frac{b}{y_1}\right),$$

d'où, en retranchant,

$$(58)\qquad \frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1} = \pm\left(\frac{a}{y_2} - \frac{b}{y_1}\right) \qquad \text{ou} \qquad p_2 = \pm p_3.$$

Du système d'équations (38) les valeurs de $ad_3 - cd_1$, $bd_1 - ad_2$ contenant la quantité λ disparaissent; du système (39), la première équation seulement perd sa vigueur, tandis que la première équation du système (40) continue à subsister, d'où l'on déduit facilement

$$\mu^2 p_1 = \frac{p_1}{\mu^2},$$

c'est-à-dire

$$p_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 = 1.$$

Supposons d'abord

$$(59)\qquad p_1 = 0.$$

Des équations (38), (39), on pourra encore déduire

$$\frac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \nu^2 \frac{a}{y_3}\right]$$
$$= \frac{ca}{\mu^2 - 1}(a - c\mu)(p_1 - \mu p_3),$$
$$\frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \frac{a}{y_2} - \mu^2 \frac{b}{y_1}\right]$$
$$= \frac{ab}{\nu^2 - 1}(b - a\nu)(p_2 - \nu p_1).$$

En ayant égard à l'équation (59) et en remplaçant μ par $\mp \frac{1}{\nu}$, ces dernières équations se réduisent à

$$\frac{1}{ay_1} + \frac{\nu^2}{cy_3} = (a\nu \pm c)p_2. \tag{60}$$

Les relations (58), (59) nous permettent de déterminer y_1, y_2, y_3. La formule (60) nous fera connaître ensuite la valeur de ν. On trouve

$$\frac{ay_1}{c \mp b} = \frac{by_2}{c \mp b} = \frac{cy_3}{c - b}$$

et

$$\nu^2 \pm \frac{2a}{c \mp b}\nu + 1 = 0.$$

Si l'on prend la quantité $-2a : (c+b)$ comme coefficient de ν, le discriminant de l'équation devient négatif. On ne trouve ainsi finalement que les valeurs

$$\frac{ay_1}{c-b} = \frac{by_2}{c+b} = \frac{-cy_3}{c+b}, \qquad \nu = \frac{1}{b-c}\left(a \pm 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}\right).$$

Le centre d'homologie et le point S ne sont donc pas des points remarquables du triangle. Voici une construction du centre d'homologie :

Par le point A traçons une parallèle PQ à BC. Prenons sur AC un segment AE = AB. Si la bissectrice de l'angle A coupe BE en G, par ce point menons une droite GF parallèle à BC qui coupe le côté AC en F. La droite BF rencontre PQ en O.

Supposons ensuite $\mu^2 = 1$. On pourra maintenant distinguer les deux cas :

1° $\lambda = -\mu = \nu = 1$. D'après ce qui précède, on arrivera facilement aux relations

$$p_2 = p_3, \qquad p_3 = -p_1, \qquad p_1 = p_2,$$

qui ne sont satisfaites à la fois que par $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, c'est-à-dire par des valeurs infiniment grandes de y_1, y_2, y_3.

2° $\lambda = \mu = \nu = -1$. On arrivera encore au même résultat.

Examinons enfin les centres des cercles passant par les six points d'intersection des côtés non homologues des triangles abc, ABC et retournons, à cet effet, aux formules générales.

Comme la polaire du centre de la conique, par rapport à cette courbe, est la droite à l'infini (18), on trouve immédiatement, en désignant les coordonnées du centre par x_1, x_2, x_3, que ces quantités satisfont aux équations

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\left[C d_1 + (C+R)\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right) - \frac{x_1}{y_1^2}\right] \\ &= \frac{1}{b}\left[C d_2 + (C+R)\left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right) - \frac{x_2}{y_2^2}\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[C d_3 + (C+R)\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right) - \frac{x_3}{y_3^2}\right] \end{aligned}\right.$$

De la première de ces formules, on conclut facilement la suivante

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left[2(b\,d_1 - a\,d_2) + \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right] \\ &+ R\left(b\,d_1 - a\,d_2 + \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right) = \frac{b x_1}{y_1^2} - \frac{a x_2}{y_2^2}. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons dans cette équation R et $bd_1 - ad_2$ par leurs valeurs données par les équations (12), (21). On arrive ainsi à l'équation (63)

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left[(1-\lambda\mu\nu)\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right) - 2\mu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) + 2\mu\nu\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right)\right] \\ &= \mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2} - \nu\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) + \nu\lambda\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right)\right] \\ &+ \frac{x_2}{y_1}\left[-\left(\frac{a}{y_3} + \frac{b}{y_1}\right) + \mu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \mu\nu\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right)\right] \\ &+ \frac{x_3}{y_3}\left[-\frac{b}{y_1} + \lambda\mu\nu\frac{a}{y_2} + \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) - \mu\nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

En appliquant les équations (31), on trouve

$$(1-\lambda\mu\nu)\left(\frac{a}{y_2}+\frac{c}{y_1}\right)-2\mu\left(\frac{b}{y_3}+\frac{c}{y_2}\right)+2\mu\nu\left(\frac{c}{y_1}+\frac{a}{y_3}\right)$$
$$=abc[(1-\lambda\mu\nu)p_3-2\mu p_1+2\mu\nu p_2]$$
$$=abc[p_3-\mu p_1+\mu\nu p_2-\mu(p_1-\nu p_2+\nu\lambda p_3)],$$

$$-\frac{b}{y_1}+\lambda\mu\nu\frac{a}{y_2}+\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)-\mu\nu\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)$$
$$=\frac{ab}{2}[ap_1-bp_2-cp_3+\lambda\mu\nu(ap_1-bp_2+cp_3)+2\mu cp_1-2\mu\nu cp_2]$$
$$=ab\left[-\frac{1-\lambda\mu\nu}{2}(ap_1+bp_2+cp_3)+ap_1-bp_2\lambda\mu\nu+\mu cp_1-\mu\nu cp_2\right]$$
$$=ab[-a(p_1-p_2\nu+p_3\nu\lambda)+b\lambda(p_3-\mu p_1+\mu\nu p_2)].$$

Le dernier résultat a été obtenu à l'aide de la formule (33). La substitution de ces valeurs dans l'équation (63), en ayant égard aux équations (34), réduit celle-là à la suivante

$$(64)\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda\mu\dfrac{x_1}{y_1}-\nu\dfrac{x_2}{y_2}+\lambda\dfrac{a-b\nu}{c}\dfrac{x_3}{y_3}=(\nu-\lambda\mu)C.\\ \text{De même}\\ \mu\dfrac{b-c\lambda}{a}\dfrac{x_1}{y_1}+\mu\nu\dfrac{x_2}{y_2}-\lambda\dfrac{x_3}{y_3}=(\lambda-\mu\nu)C,\\ -\mu\dfrac{x_1}{y_1}+\nu\dfrac{c-a\mu}{b}\dfrac{x_2}{y_2}+\nu\lambda\dfrac{x_3}{y_3}=(\mu-\nu\lambda)C.\end{array}\right.$$

La multiplication de ces équations par c, a, b et l'addition des produits fournit une identité. Des deux premières, on peut tirer les rapports

$$(65)\quad\left\{\begin{array}{l}x_1:x_2:x_3=\left(\dfrac{a\mu-c-b\mu\nu}{\mu bc y_2 y_3}-d_3\dfrac{1-\mu^2}{\mu b y_2}+d_2\dfrac{1-\nu^2}{\nu c y_3}\right)\\ \qquad:\left(\dfrac{b\nu-a-c\nu\lambda}{\nu ca y_3 y_1}-d_1\dfrac{1-\nu^2}{\nu c y_3}+d_3\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda a y_1}\right)\\ \qquad:\left(\dfrac{c\lambda-b-a\lambda\mu}{\lambda ab y_1 y_2}-d_2\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda a y_1}+d_1\dfrac{1-\mu^2}{\mu b y_2}\right).\end{array}\right.$$

Dans ces valeurs, on pourra substituer les quantités d_1, d_2, d_3 données par (42), d'où l'on voit que les coordonnées x_1, x_2, x_3 sont proportionnelles à des fonctions linéaires de la variable u. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles correspondant à un seul système de directions λ, μ, ν ont leurs centres en ligne droite.

L'équation de cette droite, que nous appellerons, dans ce qui suit, simplement *la droite des centres*, s'obtient en éliminant u entre les valeurs de x_1, x_2, x_3 mentionnées ci-dessus. D'une manière plus simple, on parvient au même résultat en éliminant la quantité C entre les équations (64) :

Multiplions la seconde équation par $\mu - \nu\lambda$, la troisième par $\lambda - \mu\nu$ et retranchons le second produit du premier. On trouvera

$$(66) \qquad x_1 \frac{1-\lambda^2}{\lambda a y_1} + x_2 \frac{1-\mu^2}{\mu b y_2} + x_3 \frac{1-\nu^2}{\nu c y_3} = 0,$$

ou, d'après (43),

$$(67) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1(1-\lambda^2)(b\nu + c\mu - a) + x_2(1-\mu^2)(c\lambda + a\nu - b) \\ & \qquad + x_3(1-\nu^2)(a\mu + b\lambda - c) = 0; \end{aligned} \right.$$

enfin, en introduisant les angles φ_1, φ_2, φ_3,

$$(68) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1 \sin(A + 2\varphi_1) + x_2 \sin(B + 2\varphi_2) \\ & \qquad + x_3 \sin(C + 2\varphi_3) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (67) est satisfaite par les valeurs

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\mu^2 - \nu^2}{b\nu + c\mu - a} : \frac{\nu^2 - \lambda^2}{c\lambda + a\nu - b} : \frac{\lambda^2 - \mu^2}{a\mu + b\lambda - c},$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 : p_2 : p_3 = (\lambda + \mu\nu) : (\mu + \nu\lambda) : (\nu + \lambda\mu),$$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = {} & \frac{1}{b\nu + c\mu - a}\left[\frac{b(1-\nu^2)}{c\lambda + a\nu - b} - \frac{c(1-\mu^2)}{a\mu + b\lambda - c}\right] \\ & : \frac{1}{c\lambda + a\nu - b}\left[\frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu + b\lambda - c} - \frac{a(1-\nu^2)}{b\nu + c\mu - a}\right] \\ & : \frac{1}{a\mu + b\lambda - c}\left[\frac{a(1-\mu^2)}{b\nu + c\mu - a} - \frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda + a\nu - b}\right], \end{aligned}$$

dont les dernières désignent le point à l'infini de la droite des centres. Chaque point de cette droite peut donc être représenté par

$$
(69)\quad \left\{
\begin{aligned}
& x_1 : x_2 : x_3 \\
& \quad = \frac{1}{b\nu + c\mu - a}\left[h(\mu^2 - \nu^2) + \frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda + a\nu - b} - \frac{c(1-\mu^2)}{a\mu + b\lambda - c}\right] \\
& \quad : \frac{1}{c\lambda + a\nu - b}\left[h(\nu^2 - \lambda^2) + \frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu + b\lambda - c} - \frac{a(1-\nu^2)}{b\nu + c\mu - a}\right] \\
& \quad : \frac{1}{a\mu + b\lambda - c}\left[h(\lambda^2 - \mu^2) + \frac{a(1-\mu^2)}{b\nu + c\mu - a} - \frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda + a\nu - b}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

où h est une variable quelconque.

Il en résulte que la droite des centres ne dégénérera en un seul point, que si l'on a :

1°

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \mu = \nu = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \mu = -\nu = -1,$$

si nous excluons les valeurs

$$\lambda = \mu = \nu.$$

Nous arrivons ainsi à des cas précédemment considérés.

2°

$$\frac{(1-\lambda^2)(b\nu + c\mu - a)}{a} = \frac{(1-\mu^2)(c\lambda + a\nu - b)}{b} = \frac{(1-\nu^2)(a\mu + b\lambda - c)}{c},$$

où, en introduisant φ_1, φ_2, φ_3,

$$\sin(A + 2\varphi_1) : \sin(B + 2\varphi_2) : \sin(C + 2\varphi_3) = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Les solutions de ces équations sont

$$\varphi_1 = \frac{2m_1 + 1}{2}\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1 = k_1\pi - A,$$

$$\varphi_2 = \frac{2m_2 + 1}{2}\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_2 = k_2\pi - B, \qquad \ldots$$

où m_1, m_2, ..., k_1, k_2, ... sont entiers. Ce n'est que le premier cas que nous poursuivons. On trouve que le centre d'homologie coïncide alors avec l'orthocentre du triangle ABC, et les sommets du triangle abc seront à l'infini.

A la supposition que nous venons de faire il ne correspond donc aucun triangle réel.

3°

$$\left[\frac{b(1-\nu^2)}{c\lambda+a\nu-b}-\frac{c(1-\mu^2)}{a\mu+b\lambda-c}\right]$$
$$:\left[\frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu-b\lambda-c}-\frac{a(1-\nu^2)}{b\nu+c\mu-a}\right]$$
$$:\left[\frac{a(1-\mu^2)}{b\nu+c\mu-a}-\frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda+a\nu-b}\right]$$
$$=(\mu^2-\nu^2):(\nu^2-\lambda^2):(\lambda^2-\mu^2).$$

En transformant l'une quelconque de ces équations, on obtiendra

$$(70)\quad \frac{a(\mu^2-\nu^2)}{b\nu-c\mu-a}-\frac{b(\nu^2-\lambda^2)}{c\lambda+a\nu-b}+\frac{c(\lambda^2-\mu^2)}{a\mu+b\lambda-c}=0.$$

Les coordonnées du centre de la série des cercles correspondant à un système de valeurs de λ, μ, ν seraient, d'après (69),

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\mu^2-\nu^2}{b\nu+c\mu-a} : \frac{\nu^2-\lambda^2}{c\lambda+a\nu-b} : \frac{\lambda^2-\mu^2}{a\mu+b\lambda-c},$$

valeurs qui, d'après (70), satisfont à l'équation de la droite à l'infini. Il ne correspond donc aucun cercle réel à la supposition que nous venons d'examiner. Le résultat de notre examen fournit donc ce théorème :

Tous les cercles correspondant à un seul système de valeurs de λ, μ, ν ne sont concentriques que dans les deux cas précités (1°).

Est-il possible de faire coïncider la droite des centres avec une droite

$$(71)\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

arbitrairement choisie dans le plan du triangle? D'après (60), il suffit que les équations (72)

$$(73)\qquad \begin{cases} \sin(A + 2\varphi_1) = \beta u_1, \\ \sin(B + 2\varphi_2) = \beta u_2, \\ \sin(C + 2\varphi_3) = \beta u_3 \end{cases}$$

soient satisfaites à la fois; β est une quantité qu'on peut déterminer de la manière suivante. D'après (48), on aura

$$\operatorname{arc}\sin\beta u_1 + \operatorname{arc}\sin\beta u_2 + \operatorname{arc}\sin\beta u_3 = (2m+1)\pi;$$

par conséquent,

$$(73)\quad \beta = \pm\frac{1}{2u_1u_2u_3}\sqrt{2u_2^2u_3^2 + 2u_3^2u_1^2 - 2u_1^2u_2^2 - u_1^4 - u_2^4 - u_3^4}.$$

D'après (50), on aura encore

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= [\cos A - \cos(A + 2\varphi_1)] \\ &\quad : [\cos B - \cos(B + 2\varphi_2)] : [\cos C - \cos(C + 2\varphi_3)] \\ &= \left(\cos A \pm \frac{u_2^2 + u_3^2 - u_1^2}{2u_2u_3}\right) : \left(\cos B \pm \frac{u_3^2 + u_1^2 - u_2^2}{2u_3u_1}\right) \\ &\quad : \left(\cos C \pm \frac{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}{2u_1u_2}\right).\end{aligned}$$

Si l'on peut construire un triangle dont les côtés soient proportionnels à u_1, u_2, u_3, et si l'on désigne par U_1, U_2, U_3 ses angles, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= (\cos A \pm \cos U_1) \\ &\quad : (\cos B \pm \cos U_2) : (\cos C \pm \cos U_3)\end{aligned}$$

et, d'après (72) et (73),

$$\varphi_1 = \frac{\pi - (A \pm U_1)}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \frac{2\pi - (A \pm U_1)}{2},$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi - (B \pm U_2)}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi - (B \pm U_2)}{2}, \qquad \ldots.$$

Examinons à quelle condition la droite des centres passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il faut et il suffit, pour cela, que l'équation (68) soit satisfaite par

$$x_1 : x_2 : x_3 = \cos A : \cos B : \cos C,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$\begin{aligned}\sin 2(A + \varphi_1) + \sin 2(B + \varphi_2) + \sin 2(C + \varphi_3)\\ = -(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3)\end{aligned}$$

ou, après quelques réductions,

$$\frac{\sin(A + \varphi_1)}{\sin \varphi_1}\,\frac{\sin(B + \varphi_2)}{\sin \varphi_2}\,\frac{\sin(C + \varphi_3)}{\sin \varphi_3} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda\mu\nu = 1.$$

Cette équation est, d'après (49), équivalente à la suivante

$$\frac{A'B}{A'C}\,\frac{B'C}{B'A}\,\frac{C'A}{C'B} = 1,$$

laquelle indique que les points d'intersection des directions λ, μ, ν avec les côtés opposés du triangle ABC sont en ligne droite; d'où ce théorème :

Si les trois directions λ, μ, ν *rencontrent les côtés opposés du triangle* ABC *en trois points situés en ligne droite, la droite des centres passera par le centre du cercle circonscrit.*

Un cas particulier est celui où ces points d'intersection sont sur la droite à l'infini. On revient alors au théorème connu de M. Lemoine.

Cherchons de même la condition qui doit être satisfaite afin que la droite des centres passe par le centre du cercle inscrit. Cette condition revient à

$$\sin(A + 2\varphi_1) + \sin(B + 2\varphi_2) + \sin(C + 2\varphi_3) = 0,$$

équation exigeant qu'une des relations

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\varphi_1\right)=0,\quad \cos\left(\frac{B}{2}+\varphi_2\right)=0,\quad \cos\left(\frac{C}{2}+\varphi_3\right)=0$$

ait lieu. D'où cet énoncé :

Si une des directions λ, μ, ν *divise en deux parties égales un des angles extérieurs du triangle, la droite des centres passe par le centre du cercle inscrit.*

La droite des centres passera par le point de Lemoine, si l'on a

$$\sin A\sin(A+2\varphi_1)+\sin B\sin(B+2\varphi_2)\\ +\sin C\sin(C+2\varphi_3)=0,$$

ce qui revient à

$$(75)\qquad \frac{\cos(A+\varphi_1)}{\cos\varphi_1}\,\frac{\cos(B+\varphi_2)}{\cos\varphi_2}\,\frac{\cos(C+\varphi_3)}{\cos\varphi_3}=-1.$$

Si par A, B, C nous traçons trois droites perpendiculaires aux directions λ, μ, ν et rencontrant les côtés du triangle sous les angles ψ_1, ψ_2, ψ_3, on aura, d'après (75),

$$\frac{\sin(A+\psi_1)}{\sin\psi_1}\,\frac{\sin(B+\psi_2)}{\sin\psi_2}\,\frac{\sin(C+\psi_3)}{\sin\psi_3}=-1,$$

d'où ce théorème :

Si les directions λ, μ, ν *sont telles que les perpendiculaires menées par* A, B, C *sur ces directions sont concourantes, la droite des centres passe par le point de Lemoine du triangle* ABC.

Examinons enfin le lieu des centres en supposant que l'équation

$$1+\lambda\mu\nu=0$$

soit satisfaite. A cet effet, retournons à l'équation désignée par (62) et à une équation analogue renfermant $cd_2 - bd_3$

$$C\left[2(bd_1 + ad_2) - \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right] + R\left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right) = \frac{bx_1}{y_1^2} + \frac{ax_2}{y_2^2},$$

$$C\left[2(cd_2 - bd_3) + \frac{c}{y_2} - \frac{b}{y_3}\right] + R\left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2} - \frac{b}{y_3}\right) = \frac{cx_2}{y_2^2} - \frac{bx_3}{y_3^2}.$$

Dans la dernière remplaçons $cd_2 - bd_3$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (20). On trouve

$$C\left[2(bd_1 - ad_2) - \frac{2a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right] + R\left[bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2} + \mu\frac{b}{y_3}\right] = -\mu\frac{cx_2}{y_2^2} + \mu\frac{bx_3}{y_3^2}.$$

La différence de ce résultat et de l'équation (62), en remplaçant R par sa valeur donnée par (12), peut être mise sous la forme

$$C\left[\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right] = \mu\frac{b}{y_3}\frac{x_1}{y_1} - \left[\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right]\frac{x_2}{y_2} - \frac{b}{y_1}\frac{x_3}{y_3},$$

équation qui, en vertu de la relation (24) et de ses analogues, se réduit à

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)C = \lambda\mu\frac{b}{y_3}\frac{x_1}{y_1} - \left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)\frac{x_2}{y_2} - \lambda\frac{b}{y_1}\frac{x_3}{y_3}.\\ &\text{De même,}\\ &\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)C = -\mu\frac{c}{y_2}\frac{x_1}{y_1} + \mu\nu\frac{c}{y_1}\frac{x_2}{y_2} - \left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)\frac{x_3}{y_3},\\ &\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)C = -\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\frac{x_1}{y_1} - \nu\frac{a}{y_3}\frac{x_2}{y_2} + \nu\lambda\frac{a}{y_2}\frac{x_3}{y_3}.\end{aligned}\right.$$

La somme des produits de ces équations par $-\nu$, $\nu\lambda$, 1 respectivement, est une identité.

En éliminant C entre les deux premières équations, on obtient, pour la droite des centres, l'équation

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right]\\ &\quad-\frac{x_2}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}+\mu\nu\frac{c}{y_1}\right)\\ &\quad+\frac{x_3}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}-\lambda\frac{b}{y_1}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

D'après l'équation (24) et ses analogues, on aura

$$\begin{aligned} &\mu\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right]\\ &\quad=-\frac{1}{\nu}\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}-\mu\frac{c}{y_2}\right)\\ &\quad=\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}+\lambda\mu\frac{b}{y_3}\right)\end{aligned}$$

et deux autres équations résultant de la précédente par une permutation cyclique de λ, μ, ν; a, b, c; y_1, y_2, y_3.

A l'aide de ces formules, l'équation (77) de la droite des centres peut se présenter sous la forme plus symétrique

$$\begin{aligned} &-\mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right]\\ &\quad+\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{a}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}-\frac{a}{y_2}\right)+\mu\frac{c}{y_1}\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\right]\\ &\quad+\lambda\mu\frac{x}{y_3}\left[\frac{b}{y_1}\left(\frac{c}{y_2}-\frac{b}{y_3}\right)+\nu\frac{a}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\right]=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -\mu\frac{x_1}{y_1}\left(\frac{cp_2}{y_2}-\frac{\lambda bp_3}{y_3}\right)-\frac{x_2}{y_2}\left(\frac{ap_3}{y_3}+\frac{\mu cp_1}{y_1}\right)&\\ +\lambda\mu\frac{x_3}{y_3}\left(\frac{bp_1}{y_1}-\frac{\nu ap_2}{y_2}\right)&=0.\end{aligned}$$

Cette droite passe par les points

$$x_1 : x_2 : x_3 = ay_1 : \lambda\mu by_2 : \mu cy_3.$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 : p_2 : y_3.$$

de sorte qu'elle dégénérera en un seul point, si l'on se trouve dans l'un des cas suivants :

1° $p_1 = p_2 = p_3 = 0$; aucune valeur finie de y_1, y_2, y_3 ne correspond à cette hypothèse;

2° $ay_1 = \lambda\mu b y_2 = -\mu c y_3 = 0$; cette équation exige $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, ce qui reviendrait à une absurdité;

3° $p_1 : p_2 : p_3 = ay_1 : \lambda\mu b y_2 : -\mu c y_3$. D'après la formule (53), on aurait alors

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0,$$

et par suite le point y_1, y_2, y_3 appartiendrait à la droite de l'infini.

Nous sommes arrivés ainsi à ce résultat, qu'en supposant les directions λ, μ, ν concourantes, la droite des centres ne dégénérera jamais en un seul point.

Il nous resterait encore à examiner la droite des centres dans le cas

$$\lambda = 1, \qquad \mu\nu = -1,$$

que nous avons déjà considéré. On n'obtient ainsi aucun résultat remarquable.