Arthur Tresse

Sur l'intersection de deux quadriques, dans le cas où elle se décompose

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 216-227
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__216_1>

SUR L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES, DANS LE CAS OU ELLE SE DÉCOMPOSE;

PAR M. ARTHUR TRESSE,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.

Ce travail répond à une question qui figure depuis quelques années au programme de l'agrégation de Mathématiques. M. Kœnigs a déjà traité le problème parmi les leçons qu'il a publiées; sa méthode consiste à étudier l'intersection de deux quadriques par rapport aux génératrices de l'une d'elles, et il emploie dans ce but les coordonnées de Chasles. La méthode suivante, tout en usant d'un procédé différent, envisage la question au même point de vue. Elle n'a donc pas le mérite d'une grande originalité, et conduit naturellement à présenter les résultats dans le même ordre. Elle pourra cependant offrir quelque intérêt aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

1. Nous emploierons un mode de représentation plane des quadriques, qui figure dans la Géométrie de Clebsch [1] et qui n'est, au fond, qu'une généralisation de l'étude de la sphère à l'aide de la projection stéréographique. Pour lui donner la portée dont il est susceptible, nous donnerons aux mots *points, plans* et *droites,* le sens le plus général qu'on leur donne en Géométrie analytique. Nous ne ferons ainsi aucune distinction entre le réel et l'imaginaire, et, par conséquent, regarderons une quadrique comme ayant toujours des génératrices rectilignes.

Soient donc une quadrique S, O un quelconque de ses points, OI, OJ, ses deux génératrices, *supposées distinctes,* passant par ce point.

Soit P un plan arbitraire ne passant pas par O, et rencontrant OI et OJ en I et en J. A tout point M de la surface, nous ferons correspondre, sur le plan P, le point μ, intersection de ce plan avec la droite OM, c'est-à-dire, sa perspective sur le plan P par rapport au point de vue O ; μ sera appelé l'*image* de M. En général, tout point M de la surface a une image bien déterminée ; et, réciproquement, tout point μ du plan P est l'image d'un point bien déterminé de S, situé sur la droite Oμ. Il n'y a d'exception que : 1° lorsque M vient en O, auquel cas son image est indéterminée sur la

---

[1] *Vorlesungen über Geometrie,* bearbeitet von Lindemann, t. II, 1re partie, p. 414.

droite IJ; 2° lorsque μ vient soit en I, soit en J, auquel cas il correspond à tous les points, soit de la génératrice OI, soit de la génératrice OJ.

A toute courbe C de S correspond une courbe γ de P, dite son *image,* et lieu des images de ses points. Nous n'étudierons que des courbes C ne passant pas par O; leurs images ne rencontrent donc pas la droite IJ en d'autres points que I et J.

2. Si la courbe C a, en M, une tangente MT, la courbe γ a aussi, en μ, une tangente $\mu\theta$, intersection de P avec le plan OMP.

Si deux courbes C et C_1 se coupent en un point M, non situé sur l'une des droites OI, OJ, et ont en ce point des tangentes distinctes, leurs images se couperont en μ et auront aussi en μ deux tangentes distinctes. Si deux courbes C et C_1 deviennent tangentes en M, leurs images γ et γ_1 deviennent tangentes en μ; plus généralement, si C et C_1 ont n points communs, confondus en M, c'est-à-dire, si n points distincts, communs aux deux courbes, sont venus se confondre en M, les images γ et γ_1 auront aussi en μ n points communs confondus. La réciproque est immédiate.

Ceci se modifie un peu, si M vient sur l'une des droites OI et OJ. Si la courbe C passe en M, situé sur OI, son image μ passera en I, et sa tangente en I sera encore l'intersection de P avec le plan OMT, qui devient ici le plan tangent à la quadrique en M. Donc, si deux courbes C et C_1 rencontrent OI en des points M et M_1 distincts, leurs images γ et γ_1 se coupent en I où elles ont des tangentes distinctes. Si les courbes C et C_1 viennent à se couper en M sur OI, leurs images γ et γ_1 auront $n+1$ points communs, confondus en I. La réciproque est encore immédiate.

3. En particulier, toute *génératrice* de la surface, rencontrant toujours soit OI, soit OJ, aura pour image une droite passant soit par I, pour les génératrices d'un système, soit par J, pour celles de l'autre. Il y a exception pour OI et OJ, qui passent par O, et dont les images se réduisent aux points I et J.

Réciproquement, toute droite du plan P, passant soit par I, soit par J, mais distincte de IJ, est l'image d'une génératrice de la surface.

De même, toute conique de la surface ne passant pas par O, mais rencontrant nécessairement OI et OJ, a pour image *une conique passant par les points* I *et* J. Réciproquement, *toute conique* γ *du plan* P *passant par les points* I *et* J *est l'image d'une conique de la surface;* car, si l'on considère trois points μ_1, μ_2, μ_3 de cette conique, distincts entre eux et de IJ, et les points correspondants de S, M_1, M_2, M_3, ces trois derniers points sont distincts et leur plan coupe S suivant une conique C, dont l'image, passant par μ_1, μ_2, μ_3, I et J, se confond bien avec γ.

4. *Image de l'intersection de la quadrique avec une autre quadrique.* — Considérons une autre quadrique Σ, *ne passant pas par* O, et coupant S suivant une courbe C. C'est une courbe rencontrée par chaque plan en quatre points; son image γ est donc coupée par une droite quelconque en quatre points, c'est-à-dire est du quatrième degré. De plus, chaque droite OI, OJ rencontre Σ et, par suite, C en deux points différents de O : l'image γ a donc deux points doubles en I et J.

Réciproquement, toute courbe plane, γ, de P, *du quatrième degré et ayant deux points doubles en* I *et* J, est l'image de l'intersection de S avec une autre quadrique. En effet, le fait d'avoir deux points doubles en I et J assujettit cette courbe à six conditions linéaires (par rapport aux coefficients de son équation); une courbe du quatrième degré étant définie par quatorze conditions, γ sera donc complètement déterminée par huit de ces points, distincts de I et de J, et convenablement choisis, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8$. Par les huit points correspondants $M_1, M_2, \ldots, M_8$ de S on peut toujours faire passer une infinité de quadriques parmi lesquelles la quadrique proposée. Chacune d'elles coupe S suivant une courbe C dont l'image, assujettie aux mêmes conditions que celles qui déterminent entièrement γ, se confond bien avec γ.

5. La question revient donc à étudier *les courbes planes du quatrième degré ayant deux points doubles en* I *et* J. Ces courbes se décomposent en même temps que les courbes C dont elles sont les images, et nous n'étudierons que ce cas. La théorie repose alors sur la remarque suivante : la courbe γ n'ayant, sur la droite IJ, d'autre point que I et J, chacune des parties en lesquelles elle se décompose devra au moins passer par l'un des points I et J, sans quoi elle ne rencontrerait la droite IJ en aucun point (réel ou imaginaire), ce qui est impossible.

Suivant l'ordre de multiplicité de ces points I et J, on pourra faire les trois hypothèses suivantes :

1° Les points I et J sont des points simples pour chacune des deux parties de la courbe;

2° L'une des parties n'a qu'un point simple, en I, par exemple; l'autre ayant aussi un point simple en I avec un point double en J;

3° L'une des parties a un point double en I sans passer par J; l'autre a un point double en J, sans passer par I.

6. *Première hypothèse.* — Dans la première suppo-

sition chacune des parties de l'image γ est rencontrée en deux points I et J par la droite IJ : la courbe γ se compose donc de *deux coniques*, ε, ε', passant chacune par I et J. La courbe C se compose donc elle-même de deux coniques E et E'.

Il y a lieu de distinguer plusieurs cas suivant la situation relative des coniques ε et ε' et leur nature. Nous supposerons d'abord qu'aucune d'elles ne se décompose.

I. Les deux coniques ε et ε' se coupent d'abord en I et J, puis en deux autres points (réels ou imaginaires) distincts, e et e'.

Alors les quadriques S et Σ *se coupent suivant deux coniques* E *et* E', lesquelles se rencontent en deux points distincts M et M'. Ces deux surfaces ont évidemment *mêmes plans tangents en* M *et* M'.

II. Les deux coniques ε et ε' se coupent en I et J, et sont tangentes en un troisième point μ. Alors S et Σ se coupent suivant *deux coniques* E *et* E' *tangentes en un point* M. On peut considérer ce cas comme un cas limite du précédent, et dire que *les deux quadriques ont deux points de contact confondus en* M.

Si l'on coupe les deux surfaces par un plan voisin du point M, on obtient deux coniques se coupant en deux points voisins situés l'un sur E, l'autre sur E'; à la limite, si le plan passe par M, les deux coniques sont tangentes : les deux surfaces sont donc bien tangentes en M.

Il y a plus, si le plan est infiniment voisin de la tangente commune MJ aux deux coniques M et M', il coupe les deux surfaces suivant deux coniques ayant quatre points d'intersection voisins. Donc, à la limite, *tout plan passant par la tangente commune* MT *coupe les deux surfaces suivant deux coniques surosculatrices.*

Remarque. — Il n'y a pas lieu de considérer le cas où les deux coniques ε et ε' se toucheront en I ou en J. En vertu de ce que nous avons vu, cette hypothèse répond, en effet, au cas où l'un ou l'autre des points M et M′ de l'un des cas précédents est situé sur l'une des droites OI ou OJ.

III. Les deux coniques ε et ε' peuvent être confondues. Les deux surfaces S et Σ ont alors en commun une seule conique E : on dit qu'*elles se coupent suivant deux coniques confondues.* En outre, toute génératrice de S, passant par un point M de E, rencontre Σ en deux points nécessairement situés sur E et, par conséquent, confondus en M : elle est donc bien tangente à Σ en M. Par suite, tout plan tangent à S en un point de E est aussi tangent à Σ; et *les deux quadriques sont tangentes en chaque point de leur conique commune.*

IV. Les coniques ε et ε' peuvent se décomposer. Nous supposerons d'abord qu'une seule d'entre elles, ε', se décompose. Elle se composera de deux droites passant nécessairement, l'une par I, l'autre par J, et se coupant en ω. Ces droites rencontrent la conique ε, l'une en μ, l'autre en μ', points que nous supposerons d'abord distincts et, par suite, différents de ω.

Dans ce cas, *les deux quadriques se coupent, d'abord suivant une conique* E, *puis, suivant deux droites,* G *et* G′, *rencontrant* E *en* M *et* M′, *et se coupant en un point* O. On voit par là que *les deux surfaces ont alors trois points de contact*, M, M′, O.

V. Dans un cas limite du précédent, les points μ, μ' et ω peuvent se confondre. Alors l'intersection des deux surfaces se compose *d'une conique* E, *et de deux droites* G, G′ *se coupant en* O *sur cette conique.*

Dans ce cas, on dit que *les deux surfaces ont trois points de contact confondus en* O. Tout plan voisin du point O coupe les deux quadriques suivant deux coniques ayant trois points d'intersection voisins de O. A la limite, *tout plan passant par* O *coupe les deux surfaces suivant deux coniques osculatrices en* O.

VI. Enfin, supposons que chacune des coniques ε et ε' se décompose. Chacune d'elles sera formée nécessairement par deux droites passant l'une par I et l'autre par J, et se coupant en ω pour la conique ε, et en ω' pour la conique ε'. De plus, si ces deux couples de droites n'ont pas de droites communes, les deux couples se couperont aux points I et J et en deux autres points μ et μ'.

Il en résulte que *les deux quadriques* S *et* Σ *se coupent suivant quatre droites formant un quadrilatère gauche* dont les sommets sont O, O', M et M'. *Ces deux quadriques sont donc tangentes en quatre points* O, O', M, M'.

VII. Les deux coniques évanouissantes ε et ε' peuvent avoir deux droites qui se confondent, celles passant par I, par exemple; les autres droites, passant par J, rencontrent la première en ω et ω'. On peut dire alors que *les deux quadriques se coupent suivant une droite double* G *et suivant deux autres droites rencontrant celle-ci en* O *et* O'.

Tout plan tangent à S en un point quelconque de G coupe les deux surfaces d'abord suivant la droite G, puis suivant deux autres droites qui ne peuvent se couper qu'en un point de l'intersection, c'est-à-dire sur G. Par suite, *les deux surfaces sont tangentes tout le long de la droite double* G.

VIII. Les deux coniques évanouissantes peuvent se confondre. L'intersection des deux surfaces se compose alors de *deux génératrices doubles qui se rencontrent en un point* O.

Comme dans le cas précédent, *les deux surfaces sont tangentes tout le long de chacune de ces droites*. De plus, *tout plan passant par le point* O *les coupe suivant deux coniques surosculatrices,* ces deux coniques ayant nécessairement quatre points communs confondus en O.

7. *Seconde hypothèse.* — Dans le second mode de décomposition de la courbe γ, une première partie de la courbe a un point simple en I et ne passe pas par le point J. C'est donc une courbe du premier degré, c'est-à-dire une droite δ. La seconde partie, ayant un point simple en I et un point double en J, est donc une cubique. La droite δ rencontre cette cubique en I et en deux autres points μ et μ'. *Les deux quadriques se coupent donc suivant une droite* D *et suivant une courbe du troisième ordre, qui rencontre cette droite en deux points* M *et* M'. Les deux surfaces sont donc, en outre, *tangentes en deux points* M *et* M'.

Il y a plus, si l'on se reporte à la figure plane, toute droite passant par I rencontre la cubique en deux points distincts de I ; toute droite passant par J la rencontre en deux points distincts de J. Les génératrices de S, appartenant au système de D, rencontrent donc la cubique gauche en deux points, et celles de l'autre système ne la rencontrent qu'en un seul point.

Si la cubique plane vient elle-même à se décomposer, elle comprendra nécessairement une conique, et nous avons déjà étudié tous les cas où la courbe γ comprend une conique. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à cette nouvelle hypothèse.

8. *Troisième hypothèse.* — Dans le troisième mode de décomposition de la courbe γ, chaque partie de la courbe est nécessairement une conique ayant un point double, I pour la première, J pour la seconde. On retrouve donc encore des cas déjà étudiés (VI, VII et VIII).

9. *Remarque.* — La méthode employée (nº 1) suppose que l'une des quadriques proposées S a deux systèmes différents de génératrices, c'est-à-dire n'est pas développable. Si les deux surfaces sont des cônes, on pourra substituer à l'une quelconque d'entre elles, une surface du réseau

$$f + \lambda\varphi = 0,$$

$f = 0$ et $\varphi = 0$ étant les équations des deux surfaces. Toute quadrique de ce réseau admet, en effet, par rapport à l'une quelconque des surfaces proposées, les *mêmes points communs* et les *mêmes contacts* que l'autre surface donnée. La méthode sera complètement en défaut dans le cas où toutes les quadriques de ce réseau sont développables. Ce cas se présente, comme le lecteur s'en convaincra aisément, lorsque les deux quadriques sont *deux cônes de même sommet* ou *deux cônes ayant une génératrice commune et même plan tangent suivant cette génératrice.*

Nous croyons que ce cas, qui échappe à notre analyse (il échappe aussi à celle de M. Kœnigs), doit, de préférence, être étudié dans une leçon complémentaire de celle-ci, qui comporterait l'étude des surfaces du réseau

$$f + \lambda\varphi = 0,$$

c'est-à-dire la recherche de toutes les quadriques passant par les points d'intersection de deux autres, et ayant, en outre, les mêmes contacts.

10. Pour résumer cette analyse, nous remarquerons que, dans tous les cas de décomposition obtenus, les deux surfaces sont tangentes au moins en deux points (sauf dans les cas II et V où l'on peut dire que ces deux points sont confondus; alors on modifie un peu l'énoncé). Ici se placerait la démonstration bien classique

et bien connue qui établit que cette condition est suffisante pour la décomposition et que nous jugeons inutile de reproduire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Pour que l'intersection de deux quadriques se décompose, il faut et il suffit que ces deux quadriques soient tangentes au moins en deux points, distincts ou confondus* (1).

D'après cela, si les deux surfaces ont trois points de contact, leur intersection se décomposera. Elle se décomposera, en outre, suivant l'un des modes III à VIII inclus, les seuls où il y ait au moins trois points de contact.

Signalons encore les deux théorèmes suivants, qui résultent de la théorie précédente, ou que l'on peut encore démontrer directement par notre méthode :

Théorème. — *Si deux quadriques ont une conique commune, elles ont aussi en commun une seconde conique.*

Théorème. — *Lorsque deux quadriques se coupent suivant deux génératrices d'un même système, elles se coupent aussi suivant deux autres génératrices de l'autre système.*

Voici comment on peut les établir directement. Considérons, dans chacun de ces cas, l'image γ de l'intersection. Dans le premier cas, cette image, comprenant d'abord une première conique, en comprendra nécessairement

(1) Voici comment il faut modifier l'énoncé, si l'on veut préciser la signification de deux points de contact confondus : « il faut et il suffit que les deux quadriques soient tangentes, au moins en deux points, ou qu'il existe une droite, tangente en un même point à chacune des surfaces, telle que tout plan passant par cette droite coupe les deux quadriques suivant deux coniques surosculatrices ».

une seconde, ce qui établit la proposition. Dans le second cas, l'image comprendra deux droites passant par l'un des points I et J, I par exemple. Elle se complétera donc par une conique ayant un point double en J, c'est-à-dire par deux droites, images de deux génératrices, dont le système est différent de celui des deux génératrices données.