Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Fouché

Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 227-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__227_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université.

La méthode que je vais développer pour résoudre le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, comparée à celle de Gergonne, présente les avantages suivants :

1° Elle s'applique sans modification au cas où les centres des trois cercles sont en ligne droite.

2° Elle donne une démonstration commode de la réciproque, c'est-à-dire qu'il est aisé de prouver que la construction indiquée fournit bien une solution du problème.

3° La construction dépend d'une circonférence auxiliaire indéterminée, ce qui permet de la varier à volonté suivant la disposition des données; elle se prête, du reste, à de légères modifications qui la rendent encore praticable dans les cas où les centres de similitude des cercles donnés sont en dehors des limites de l'épure.

4° La construction s'applique aussi bien que celle de Gergonne aux cas particuliers où un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des points, et dans les cas où des points figurent parmi les données elle reproduit directement la construction usuelle dont elle peut être ainsi considérée comme une généralisation.

5° Elle fournit une démonstration très aisée de ce que le problème admet toujours huit solutions réelles lorsque les trois circonférences sont extérieures, proposition qui, combinée avec la transformation par inversion, permet de faire la discussion complète.

Ces avantages sont obtenus par la considération des cercles isogonaux, c'est-à-dire qui coupent les trois cercles donnés sous un même angle et qui comprennent comme cas particuliers les cercles tangents et le cercle orthogonal [1].

Théorème I. — *Toute droite isogonale à deux cercles passe par l'un des centres de similitude de ces deux cercles et réciproquement; toute droite qui passe par l'un des centres de similitude de deux cercles est isogonale à ces deux cercles.*

En effet, les tangentes aux quatre points d'intersection d'une droite isogonale aux deux cercles sont deux à deux parallèles, d'où il suit que les points de contact sont homologues. La réciproque peut s'établir de la même manière, mais il convient de remarquer qu'elle n'est qu'une application du principe fondamental d'après lequel la transformation par inversion conserve les angles.

Théorème II. — *Tout cercle qui en coupe deux*

---

(1) Les principales propriétés des cercles isogonaux, mais seulement pour les cercles tracés sur la sphère, dans le *Traité de Geométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (6e édition, t. II, p. 286).

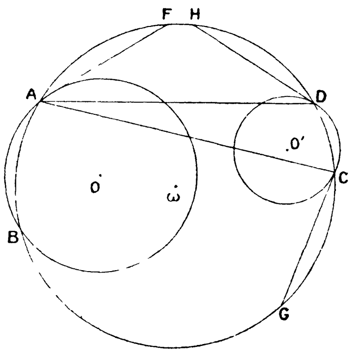
autres en deux points antihomologues est isogonal à ces deux-là.

Soit le cercle ω qui coupe les deux cercles O et O′ aux points antihomologues A et B. Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le centre de similitude S des deux cercles donnés et pour module le module d'inversion des deux cercles O et O′, lequel est égal au produit SA.SB et est en même temps la puissance du point S par rapport à ω. Les deux cercles O et O′ s'échangent et le cercle ω se transforme en lui-même. Comme la transformation conserve les angles, l'angle de ω avec O′, qui remplace celui de ω avec O, doit donc lui être égal.

Théorème III. — *Réciproquement, quand un cercle est isogonal à deux cercles donnés, il les coupe en quatre points qui sont deux à deux antihomologues.*

Soit (*fig.* 1) le cercle ω isogonal aux deux cercles O et O′ qu'il coupe aux quatre points A, B, C, D. Joignons

Fig. 1.



A, C et A, D et supposons que la tangente en A au cercle O soit comprise dans le segment ADC et coupe l'arc AC en F. L'arc AF, moindre qu'une demi-circonférence, mesure le double de l'angle des deux cercles. Les tangentes en C et en D au cercle O′ couperont le cercle ω en deux points G et H tels que les arcs CG et DH, moindres qu'une demi-circonférence, soient égaux à l'arc AF; ces arcs sont, du reste, dirigés en sens inverse à partir de C et D. Je considère celui qui est dirigé en sens inverse de AF, soit DH. De l'égalité des arcs AF et DH résulte celle des arcs AH et DF qui montre que les deux tangentes AF et DH coupent la droite AD sous un même angle. Donc la droite AD isogonale aux deux cercles doit passer par l'un des centres de similitude (théorème I), et, comme les tangentes en A et D aux cercles O et O′ ne sont pas parallèles, ces points A et D sont antihomologues.

Corollaire. — *Tous les cercles isogonaux à deux cercles donnés se répartissent en deux groupes tels que, par rapport à tous les cercles d'un même groupe, l'un des centres de similitude a la même puissance égale au module d'inversion des deux cercles relativement au centre de similitude considéré.*

Réciproquement, *tout cercle tel que la puissance d'un des centres de similitude de deux cercles donnés par rapport à lui est égale au module d'inversion des deux cercles donnés relativement au centre de similitude considéré est isogonal aux deux cercles fixes.*

En effet, s'il occupe l'un des cercles en A, il doit passer par le point antihomologue A′.

Remarque I. — Ces propositions permettent de généraliser la notion des cercles isogonaux et de faire rentrer sous cette dénomination des cercles qui ne coupent pas les deux cercles donnés pourvu que le centre de similitude ait par rapport à eux la puissance convenable.

Remarque II. — Il est facile de reconnaître que les cercles isogonaux formant le groupe qui correspond au centre de similitude directe sont ceux qui coupent les deux cercles fixes de telle manière que les angles formés par les tangentes menées en l'un des points d'intersection, du *côté de l'intérieur*, sont égaux, tandis que ceux qui forment le groupe correspondant au centre de similitude inverse sont tels que les angles ainsi définis sont supplémentaires.

Les cercles orthogonaux aux deux cercles fixes appartiennent aux deux groupes à la fois, et les quatre points d'intersection sont deux à deux antihomologues par rapport aux deux centres de similitude.

Théorème IV. — *Les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux tels que tous les cercles d'un même faisceau ont pour axe radical commun l'un des axes de similitude des trois cercles donnés.*

En effet, considérons les cercles isogonaux aux cercles O et O′ et correspondant à un centre de similitude S″, puis, parmi ceux-ci, ceux qui coupent le cercle O″ sous le même angle que les cercles O et O′. Ils peuvent se répartir en deux familles, suivant qu'ils correspondent à l'un ou l'autre des centres de similitude des cercles O et O″; si nous considérons seulement ceux qui correspondent au centre de similitude S, on voit que les points S et S″ auront la même puissance par rapport à tous ces cercles. Par conséquent, l'axe de similitude SS″ est l'axe radical commun de tous ces cercles; en faisant varier les centres de similitude, on trouve les quatre faisceaux correspondant aux quatre axes de similitude.

Réciproquement, tous les cercles d'un des quatre faisceaux définis dans l'énoncé sont isogonaux aux trois cercles donnés.

En effet, la puissance par rapport à chacun d'eux de chacun des centres de similitude S et S$''$ situés sur l'axe considéré étant égale au module d'inversion de deux cercles correspondant à ce centre de similitude, il suit du corollaire du théorème III que le cercle considéré coupe sous un même angle les cercles O et O$'$ et les cercles O et O$''$.

Remarque I. — Le faisceau des cercles qui admettent pour axe radical commun l'axe de similitude SS$''$ est tel que le centre de similitude S, en ligne droite avec les premiers, a la même puissance par rapport à tous les cercles du faisceau. Ainsi les trois centres de similitude qui correspondent à un cercle isogonal sont toujours trois centres en ligne droite. On arriverait à la même conclusion par l'application de la remarque II du théorème III. Le cercle orthogonal aux trois cercles fixes appartient aux quatre faisceaux à la fois.

Remarque II. — Si le cercle orthogonal aux trois cercles donnés est réel, on voit immédiatement que le lieu des centres des cercles isogonaux d'un même faisceau, devant contenir le centre du cercle orthogonal, sera la perpendiculaire abaissée du centre radical sur l'axe de similitude. Dans le cas général, on arrive à la même conclusion en transformant la figure par inversion avec le centre radical pour pôle, et pour module la puissance commune de ce centre par rapport aux trois cercles donnés. Alors ceux-ci se reproduisent de telle sorte que deux points antihomologues, par rapport à un centre de similitude, se transforment en deux autres points antihomologues par rapport au même centre. Il faudra donc que les cercles isogonaux d'un même faisceau se transforment les uns dans les autres, ce qui exige que leurs centres soient alignés sur le pôle d'inversion qui est le centre radical.

Ainsi, dans tous les cas, *le lieu des centres des cercles isogonaux d'un même faisceau est la perpendiculaire abaissée du centre radical des trois cercles donnés sur l'axe de similitude correspondant.*

Remarque III. — Il résulte de ce qui précède que les cercles isogonaux d'un même faisceau se répartissent en groupes de deux qui admettent pour centre de similitude le centre radical des trois cercles donnés et qui coupent ceux-ci sous le même angle.

Remarque IV. — Si les trois cercles ont un centre de similitude commun, trois centres de similitude se confondent en ce point; l'axe de similitude correspondant est indéterminé, et le faisceau des cercles isogonaux correspondant à cet axe se réduit aux droites passant par le centre de similitude, car les points antihomologues sur les trois cercles sont nécessairement alignés sur ce centre.

Théorème V. — *Tous les cercles isogonaux à trois cercles fixes, qui appartiennent à un même faisceau, coupent l'un quelconque des cercles fixes suivant des droites qui concourent en un même point de l'axe de similitude correspondant.*

En effet, soit un cercle isogonal ω qui coupe le cercle O suivant une droite MN, laquelle rencontre l'axe de similitude correspondant en H. Le point H a la même puissance par rapport aux cercles O et ω, et quand on fait varier le cercle ω, il conserve la même puissance par rapport à ce cercle, puisqu'il appartient à l'axe radical commun des cercles ω. Donc il fait partie de l'axe radical, c'est-à-dire de la sécante commune de tout cercle ω et du cercle O. C. Q. F. D.

Problème I. — *Trouver un cercle isogonal à trois cercles donnés correspondant à trois centres de similitude en ligne droite.*

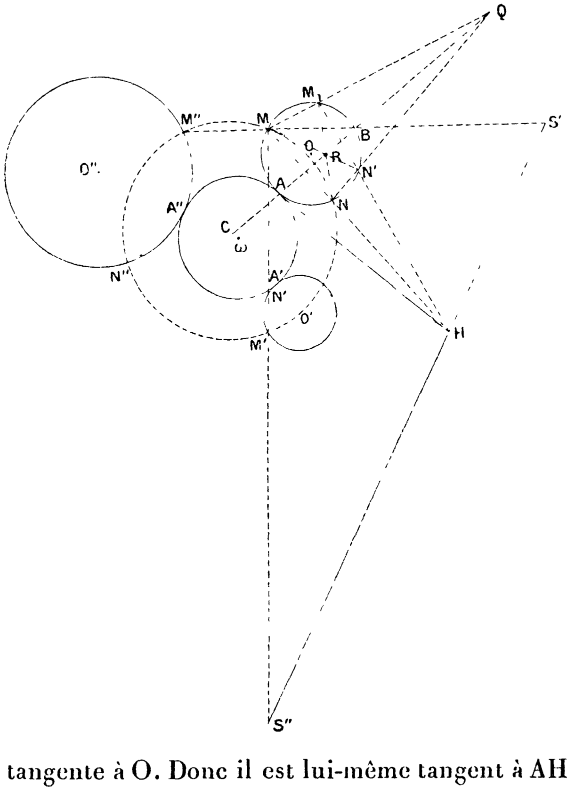
Le problème est indéterminé. Le cercle orthogonal, s'il est réel, en donne une première solution. Pour en avoir une autre, soit A un point arbitraire de l'un des cercles donnés O. Prenons les antihomologues A' et A'' de A sur les deux autres cercles O' et O'', relativement aux centres de similitude considérés. Le cercle cherché passant par A devra aussi passer par A' et A'' et, réciproquement, le cercle passant par A, A', A'' sera isogonal aux trois cercles donnés, car, passant par A et A', il coupe O et O' sous le même angle et, passant par A et A'', il coupe O et O'' sous le même angle. Ainsi il suffit de tracer le cercle circonscrit au triangle $AA'A''$.

Problème II. — *Construire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Soit ω (*fig.* 2) le cercle cherché, tangent en A, A', A'' aux trois cercles O, O', O''.

Ce cercle est un cercle isogonal qui coupe les trois cercles donnés sous un angle nul. La tangente commune en A est l'axe radical des deux cercles O et ω; elle vient rencontrer l'axe de similitude correspondant en un point H par lequel passera aussi la sécante commune du cercle O et d'un cercle isogonal quelconque de la même famille, ce qui permet de le déterminer. On mènera de H une tangente HA au cercle O, puis on cherchera les points A' et A'' antihomologues de A sur les deux autres cercles relativement aux centres de similitude qui se trouvent sur l'axe de similitude considéré. Le cercle passant par A, A′, A″ sera tangent aux trois cercles donnés. En effet, d'abord, il leur est isogonal (problème I); de plus, son axe radical avec O devant passer par H est

Fig. 2.



AH tangente à O. Donc il est lui-même tangent à AH et, par suite, à O. Alors l'angle commun d'intersection est nul et il est tangent aux trois cercles donnés.

De ce qui précède résulte la construction suivante :

On considère un axe de similitude contenant les centres de similitude S′ *et* S″. *On prend sur* O *un point arbitraire* M *qu'on joint à* S′ *et* S″. MS″ *coupe* O *en* *deux points dont l'un* M′ *est antihomologue de* M. *De même* MS′ *détermine sur* O″ *un point* M″ *antihomologue de* M. *On trace le cercle circonscrit au triangle* MM′M″ *qui coupe les trois cercles donnés en trois autres points* N, N′, N″. *On joint* MN *qui rencontre l'axe de similitude en* H. *De* H *on mène une tangente* HA *au cercle* O *et l'on cherche comme précédemment les points* A′ *et* A″ *antihomologues de* A *sur les deux autres cercles. Le cercle circonscrit au triangle* A A′ A″ *répond à la question.*

Comme on peut mener du point H deux tangentes HA, HB au cercle O, chaque axe de similitude fournit deux solutions réelles ou imaginaires, ce qui fait en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

L'axe de similitude est déterminé d'après des règles bien connues, quand on donne à l'avance l'espèce des contacts.

Remarque I. — Si l'on veut traiter le problème directement, indépendamment de la théorie des cercles isogonaux, on commencera par remarquer que les trois points de contact A, A′, A″ sont deux à deux antihomologues, puis on construira, comme dans le problème I, trois points M, M′, M″, M′ et M″ étant respectivement antihomologues de M sur O′ et O″. On remarquera alors que, si l'on fait varier le point M, le cercle MM′M″ conserve la même puissance par rapport aux points S′ et S″, de sorte que tous les cercles M, M′, M″ ont le même axe radical S′S″. Il en résulte, d'après le raisonnement du théorème V, que la sécante commune MN au cercle variable MM′M″ et au cercle fixe O passe par un point fixe H de l'axe de similitude, par lequel doit aussi passer la tangente en A commune à O et ω. On retrouve ainsi la construction indiquée. Pour démontrer que le cercle ω

passant par A, A′, A″ est bien tangent aux trois cercles donnés, on remarque que l'axe radical de ω et O étant AH, ω est tangent à O en A. Alors, comme ω passe par A′ antihomologue de A, il est aussi tangent à O′ en A′, et enfin il est tangent à A″ pour une raison analogue.

Remarque II. — Si un ou plusieurs centres de similitude sont en dehors des limites de l'épure, on peut néanmoins construire les points M′, M″; il suffit de mener à O′ un rayon parallèle au rayon OM et de joindre le point M à l'extrémité de ce rayon; la droite MP coupe le cercle O′ en un second point M′ qui est antihomologue de M. Il faut seulement faire attention au sens des rayons OM et O′P′, suivant qu'on considère le centre de similitude direct ou inverse.

Si l'axe de similitude, ou simplement le point H, est en dehors des limites de l'épure, on pourra y suppléer de la manière suivante : On cherchera deux groupes de points antihomologues MM′M″, $M_1M'_1M''_1$. Les deux cercles isogonaux ainsi déterminés coupent le cercle O suivant des cordes MN, M_1N_1; on joindra MM_1 et NN_1 qui se couperont en Q, MN_1 et M_1N qui se couperont en R. La droite QR sera la polaire du point H où se coupent MN et M_1N_1 et, par suite, son intersection avec le cercle O déterminera les deux points de contact A et B.

Remarque III. — Si l'on considère les deux cercles ω et ω' fournis par un même axe de similitude, lesquels touchent les cercles donnés en AA′A″ et BB′B″, on peut remarquer que AB, qui est la polaire de H par rapport au cercle O, contient le pôle de l'axe de similitude par rapport au même cercle. De plus les cercles ω et ω' correspondant au même axe de similitude sont ceux qui se déduisent l'un de l'autre par une inversion effectuée du centre radical C des trois cercles donnés comme pôle (remarque III du théorème IV). Il en résulte que les cordes AB, $A'B'$, $A''B''$ vont concourir au centre radical C. On retrouve ainsi la construction de Gergonne, qui consiste à joindre le centre radical des trois cercles donnés aux pôles de l'axe de similitude par rapport aux trois cercles donnés.

Remarque IV. — Si le cercle isogonal $MM'M''$ coupe l'axe de similitude en deux points réels L et L', tous les cercles isogonaux du même faisceau passeront par ces deux points, et l'on sera ramené à faire passer par ces deux points un cercle tangent à l'un des cercles donnés. Mais, comme il est aisé de le reconnaître, le tracé de ce cercle, par la méthode classique, reproduit exactement notre construction générale.

Remarque V. — Si les trois cercles ont un centre de similitude commun, l'axe de similitude correspondant est indéterminé, et la méthode ne s'applique plus; mais alors il est clair que les solutions correspondant à ce centre de similitude sont les tangentes communes aux trois cercles.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX CAS PARTICULIERS.

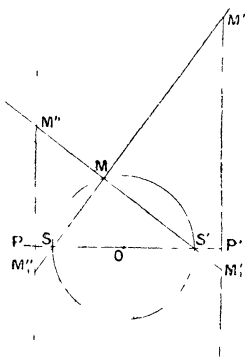
Le cas de deux cercles et d'une droite ne présente rien de particulier.

Cas de deux droites et d'un cercle.

La construction générale s'applique, mais elle donne un tracé plus compliqué que celui de la méthode de Gergonne qui consiste, dans ce cas, à circonscrire au cercle un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux droites données et à joindre les sommets de ce parallélogramme au point d'intersection des deux droites.

Ici la méthode de Gergonne a même l'avantage de fournir une discussion plus facile que celle que donne notre méthode. On connait les résultats de cette discussion d'après lesquels le problème admet huit solutions réelles si le cercle coupe les deux droites sans passer par leur point d'intersection, et quatre si le cercle ne coupe qu'une droite ou n'en coupe aucune, ou passe par leur point d'intersection. Nous en ferons usage dans la discussion générale. Mais la méthode de Gergonne cesse d'être applicable si les deux droites sont parallèles. Soient (*fig.* 3) PQ, P′Q′ les deux droites parallèles et le cercle O. Les centres de similitude sont

Fig. 3.



en S et S′ aux extrémités du diamètre perpendiculaire aux deux droites. On peut prendre un de ces deux points S pour centre de similitude commun de O avec PQ et avec P′Q′. Alors toute droite passant par S sera isogonale aux trois lignes données; comme elle rencontre l'axe de similitude en S, S sera un point de contact. Ainsi, on trouve déjà les deux tangentes en S et S′ qui doivent être considérées comme des solutions singulières, car, dans la transformation par inversion, elles deviennent des circonférences tangentes à O et aux deux circonférences transformées de PQ et de $P'Q'$ en leur point de contact qui est le pôle d'inversion. Si l'on prend des centres de similitude différents, S et S', soit M un point arbitraire de la circonférence O, joignons SM et $S'M$ qui coupent respectivement les droites $P'Q'$, PQ, en $M'M'_1$ et M''_1M''. Les points antihomologues de M sont $M'M''$ ou $M'_1M''_1$ suivant l'attribution qu'on fera des centres de similitude S et S' aux deux droites données. Les cercles circonscrits aux deux triangles $MM'M''$, $M_1M'_1M''_1$ fourniront d'après la construction générale quatre solutions nouvelles.

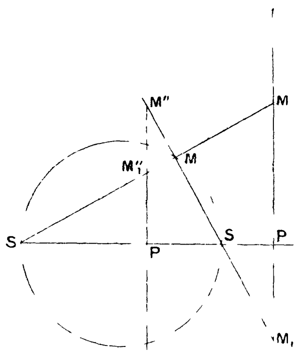
La discussion, quoique un peu longue, est très aisée :

1° Si le cercle O est entre les deux parallèles et si M' et M'' sont sur les prolongements de SM et $S'M$, les points S et S' étant en dehors de la circonférence $MM'M''$, il est impossible que celle-là passe entre S et S', de sorte que son second point d'intersection N avec O est nécessairement de même côté que M, et la corde MN coupe SS' en un point H situé en dehors de O et duquel on peut mener des tangentes au cercle O. Par un raisonnement analogue, on arrive à une même conclusion pour le cercle $MM'_1M''_1$ qui contient S et S' à son intérieur. Les quatre cercles tangents sont donc réels.

2° Si le cercle O coupe l'une des trois droites, on reconnaît par un raisonnement analogue que l'un des cercles auxiliaires $MM'M''$ (*fig.* 4), qui laisse S et S' à son extérieur, donne deux solutions, tandis que l'autre $MM'_1M''_1$ passe entre S et S' et ne donne aucune solution réelle. Donc il y a deux cercles tangents.

3° Si le cercle O est en dehors des deux parallèles, le même raisonnement montre qu'il n'y a pas de cercle tangent, ce qui est du reste évident *a priori*. Il n'y a pas d'autre solution que les deux droites.

Fig. 4.



4° Les cas limites sont trop faciles à traiter pour que nous croyions devoir insister.

Il est aisé de reconnaître que, dans les cas de *deux cercles et un point, d'un cercle, une droite et un point, d'un cercle et deux points, la construction générale reproduit la construction habituelle de ces problèmes simples, les points donnés constituant des centres de similitude.*

Théorème VI. — *Étant donnés trois cercles extérieurs deux à deux, on peut leur mener huit cercles tangents réels dont deux au plus peuvent se réduire à deux droites.*

Pour qu'un axe de similitude fournisse deux solutions réelles, il faut et il suffit que le point H situé sur cet axe (*fig.* 2) soit à l'extérieur du cercle O, ou, ce qui revient au même, à l'extérieur du segment MN, ou encore que l'axe de similitude ne traverse pas MN. Or l'axe ne peut traverser le segment MN sans traverser en même temps l'arc MN du cercle MM'M'' situé à l'intérieur de O et réciproquement. Donc, pour qu'un axe de similitude donne deux solutions réelles, il faut et il suffit que le cercle isogonal MM'M'' ne coupe pas l'axe de similitude correspondant, ou le coupe en deux points situés d'un même côté du cercle O.

Il résulte de cette condition que si le cercle MM'M'' coupe l'axe de similitude à l'intérieur de l'un des cercles donnés en un point unique, il le coupera aussi à l'intérieur des deux autres cercles, car O est l'un quelconque des trois cercles donnés, et la solution ne peut être à la fois réelle et imaginaire. Mais le cercle MM'M'' ne coupe l'axe qu'en deux points. Si donc cet axe ne donne aucune solution réelle il faut que l'un au moins des deux points d'intersection soit intérieur à la fois à deux des cercles donnés au moins, ce qui exige que ces deux cercles-là aient une région commune. Or cela ne peut arriver si les trois cercles donnés sont extérieurs. Donc dans ce cas toutes les solutions sont réelles. Il peut arriver que les trois cercles aient deux tangentes communes, mais ils ne sauraient en avoir trois. ?

DISCUSSION GÉNÉRALE.

1° *Si les circonférences n'ont aucun point commun*, il peut y avoir :

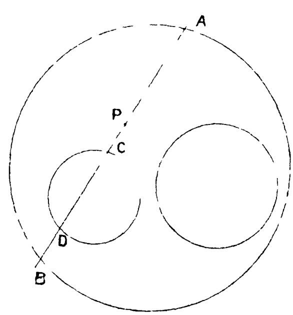
α. *Trois couples extérieurs : il y a huit solutions réelles.*

β. *Un couple intérieur et deux extérieurs*, c'est-à-dire deux cercles intérieurs et le troisième extérieur à ces deux-là. *Le problème* est manifestement *impossible.*

γ. *Deux couples intérieurs et le troisième extérieur,* c'est-à-dire que deux des circonférences données sont à l'intérieur de la troisième, et extérieures entre elles.

Dans ce cas, en prenant pour pôle d'inversion au point P situé à l'intérieur de la grande circonférence, et à l'extérieur des petites, et pour module la puissance de ce point par rapport à la grande circonférence, on transforme les trois cercles en trois cercles extérieurs. En effet, soit (*fig.* 5) une droite tirée de P qui coupe la grande circonférence en A et B et l'une des petites en

Fig. 5.



C et D. La grande circonférence se transforme en elle-même; comme PC et PD sont tous deux plus petits que PB, les distances inverses PC′ et PD′ seront plus grandes que PA et les deux points C′ et D′ seront au delà de A.

Il en résulte que le problème admet *huit solutions réelles*. Aucune ne peut se réduire à une droite.

3. *Trois couples intérieurs. Le problème* est manifestement *impossible.*

2° *Si deux des circonférences se coupent* on les transformera en droites en prenant pour pôle d'inversion l'un de leurs points d'intersection. Donc, d'après une discussion rappelée plus haut il y aura *huit solutions réelles,* si le troisième cercle coupe les deux premiers sans passer par l'un des points d'intersection, ou *quatre seu-*

lement si le troisième cercle coupe un seul de ces deux-là, ou n'en coupe aucun, ou passe par l'un de leur point d'intersection. Dans ce dernier cas, le point de concours des trois circonférences doit être considéré comme un cercle de rayon nul formant une solution quadruple. Il y a des solutions doubles s'il y a des cercles tangents. Enfin, si les trois cercles passent par deux mêmes points, ils se transforment en trois droites concourantes et le problème est impossible, ou du moins il n'admet d'autres solutions que les deux points communs qui constituent deux solutions quadruples de rayon nul.

3° *S'il y a deux cercles tangents,* le troisième ne coupant pas les deux premiers, on transformera les deux cercles tangents en deux droites parallèles en prenant le point de contact pour pôle, et l'on trouve aisément en tenant compte des deux solutions rectilignes qui donnent des cercles dans la transformation inverse. Il y a *six solutions réelles,* si, les cercles étant tangent extérieurement, le troisième leur est extérieur, ou si, étant tangents intérieurement, le troisième est intérieur au grand et extérieur au petit; *quatre solutions réelles* dans tous les autres cas. Les solutions qui passent par le point de contact doivent être considérées comme doubles. Il y a d'autres solutions doubles, si le troisième cercle est tangent à l'un des deux autres ou à tous les deux.

4° *Si enfin les trois cercles sont tangents au même point, le problème est indéterminé.*

(*A suivre.*)