NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 386-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__386_1>

SUR LA CONSTRUCTION DES CUBIQUES CUSPIDALES PAR POINTS ET TANGENTES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Les cubiques cuspidales sont des courbes unicursales qui sont à la fois du troisième ordre et de la troisième classe. Elles possèdent un point d'inflexion et un point de rebroussement.

Appelons I le point d'inflexion et R le point de rebroussement d'une cubique cuspidale donnée. Soit T le point où se rencontrent les tangentes en ces points. Si l'on pose

$$\text{IR} = a, \qquad \text{IT} = b,$$

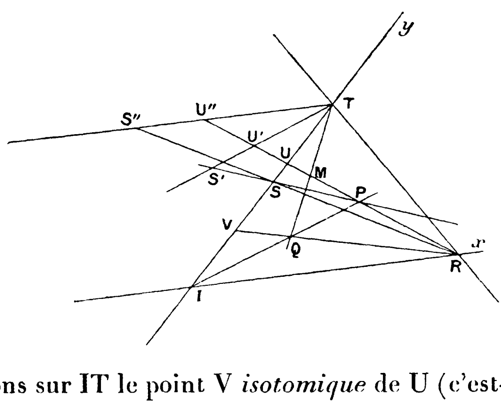
l'équation de la cubique considérée, lorsqu'on prend IR pour axe des x et IT pour axe des y, est de la forme

$$(bx + ay - ab)^2 x = \lambda y^3. \tag{1}$$

Il suffit donc de connaître, en outre du triangle IRT, un élément simple de la courbe, point ou tangente pour que celle-ci soit complètement déterminée.

Je me propose de faire voir comment la courbe peut alors être construite par points et tangentes.

2. Prenons dans le plan du triangle IRT un point M quelconque. Tirons la droite RM qui coupe IT en U et



prenons sur IT le point V *isotomique* de U (c'est-à-dire tel que U et V soient symétriques par rapport au milieu de IT). Les droites RV et TM se rencontrent en un point Q et la droite IQ coupe RU en P (¹). Je vais dé-

(¹) C'est en étudiant la transformation géométrique qui, répétée montrer que, *lorsque le point* M *décrit une droite passant par le point* T, *le point* P *décrit une cubique cuspidale répondant à la question.*

Soient x, y les coordonnées du point P; x', y' celles du point M.

L'équation de la droite RM est

$$Y(x'-a)=y'(X-a). \tag{2}$$

Faisant dans cette équation $X=0$, on a, pour valeur de IU,

$$IU=-\frac{ay'}{x'-a}.$$

Par suite,

$$IV=IT-IU=b-\frac{ay'}{x'-a}=\frac{bx'-ay'-ab}{x'-a},$$

et il vient pour équation de RV

$$\frac{X}{a}+\frac{Y(x'-a)}{bx'+ay'-ab}=1$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}&X(bx'-ay'-ab)\\&\quad -Ya(x'-a)-a(bx'+ay'-ab)=0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Quant à l'équation de TM, elle s'écrit immédiatement

$$X(y'-b)-x'(Y-b)=0. \tag{4}$$

Faisons la somme de ces deux dernières équations après avoir multiplié la seconde par $\dfrac{a(bx'+ay'-ab)}{bx'}$, de façon à faire évanouir le terme constant; nous avons

---

deux fois, donne cette construction que j'ai été amené aux résultats qui suivent. J'ai pensé qu'il y avait intérêt à publier ceux-ci à part, en raison de l'importance que présentent les cubiques cuspidales, mais je me réserve de revenir sur l'étude de la transformation en question prise dans toute sa généralité ainsi pour équation de IQ, après réductions,

$$(5)\qquad (bx' + ay' - ab)^2 X - a^2 x'y' Y = 0.$$

Le point $M(x, y)$ se trouvant à la fois sur RM et sur IQ, ses coordonnées doivent satisfaire à (2) et à (5), ce qui donne

$$(6)\qquad y(x' - a) = y'(x - a),$$
$$(7)\qquad (bx' + ay' - ab)^2 x - a^2 x'y' y = 0.$$

Mais, le point P décrivant une droite issue de l'origine I, on a encore

$$(8)\qquad y' = mx'.$$

Pour avoir le lieu décrit par le point M, il faut éliminer x' et y' entre ces trois équations.

De (6) et (8) on tire aisément

$$x' = \frac{-ay}{mx - y - ma}, \qquad y' = \frac{-may}{mx - y - ma}.$$

Portant ces valeurs de x' et de y' dans (7), on obtient, après des réductions faciles,

$$(bx + ay - ab)^2 x = \frac{a^2}{m} y^3.$$

Il suffit de rapprocher cette équation de l'équation (1) pour s'assurer que la proposition se trouve établie.

3. On déduit immédiatement de là la construction de la cubique cuspidale dont on connaît le point d'inflexion I, le point de rebroussement R, les tangentes IT et RT en ces points, et un point quelconque P_0.

En effet, on peut construire le point M_0, qui, en vertu de la transformation précédente, correspond au point P_0. Il n'y a plus ensuite qu'à prendre un point quelconque M sur la droite AM_0, pour avoir par cette transformation un point P de la cubique cuspidale.

4. Voyons maintenant comment on peut en même temps obtenir la tangente en chaque point P de la courbe.

Pour cela j'établirai le théorème suivant :

Si la tangente IT *au point d'inflexion coupe* PR *au point* U *et la tangente en* P *au point* S, *on a, pour le rapport anharmonique des points* I, U, T, S, *la valeur*

$$(\mathrm{IUTS}) = \frac{\mathrm{TI} \times \mathrm{SU}}{\mathrm{TU} \times \mathrm{SI}} = -\frac{1}{2}\ (^1).$$

L'équation de la droite RP étant

$$\frac{Y}{X-a} = \frac{y}{x-a},$$

on a

$$\mathrm{IU} = \frac{ay}{a-x}.$$

La tangente PS a pour équation

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}.$$

Mais de l'équation (1), on tire,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{y}{x}\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab}.$$

Faisant $X = 0$, on a

$$\mathrm{IS} = y - y\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab} = \frac{-2aby}{3bx+ay-3ab}.$$

---

(1) J'ai présenté ce théorème à la *Société mathématique de France* dans la séance du 20 mai 1891.

Il vient, dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{TI} &= -\,\mathrm{IT} = -\,b,\\
\mathrm{TU} &= \mathrm{IU} - \mathrm{IT} = \frac{ay}{a-x} - b = \frac{bx+ay-ab}{a-x},\\
\mathrm{SU} &= \mathrm{IU} - \mathrm{IS} = \frac{ay}{a-x} + \frac{2\,aby}{3bx+ay-3ab}\\
&= \frac{ay(bx+ay-ab)}{(a-x)(3bx+ay-3ab)},\\
\mathrm{SI} &= -\,\mathrm{IS} = \frac{2aby}{3bx+ay-3ab}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{TI}\times\mathrm{SU}}{\mathrm{TU}\times\mathrm{SI}} = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Ce qui démontre le théorème.

On déduit immédiatement de ce théorème que *si l'on considère une famille de cubiques cuspidales ayant mêmes points d'inflexion et de rebroussement et mêmes tangentes en ces points et qu'on les coupe par une droite issue du point de rebroussement, les tangentes aux divers points d'intersection concourent toutes en un même point de la tangente d'inflexion.*

5. Le rapport anharmonique (IUTS) étant projectif, projetons-le du point P sur la parallèle menée par T à PI, en (I'U'TS'). Le point I' étant à l'infini, on a $\frac{\mathrm{TI'}}{\mathrm{S'I'}} = 1$, et il vient

$$\frac{\mathrm{S'U'}}{\mathrm{TU'}} = -\frac{1}{2}$$

ou

$$\mathrm{U'S'} = \frac{\mathrm{TU'}}{2}.$$

De là la construction suivante pour la tangente en P :

Si la parallèle menée par T *à la droite qui joint le* *point* P *au point d'inflexion* I *coupe en* U′ *la droite qui joint le point* P *au point de rebroussement* R, *il suffit de prolonger le segment* TU′ *de la moitié* U′S′ *de sa longueur pour avoir la tangente* PS′ *en* P.

6. Projetons maintenant le rapport anharmonique (IUTS) à partir du point R sur la parallèle menée par T à RI en (I″U″TS″). Le point I″ étant à l'infini, on a $\frac{TI''}{S''I''} = 1$, et il vient

$$\frac{S''U''}{TU''} = -\frac{1}{2}$$

ou

$$U''S'' = \frac{TU''}{2}.$$

De là la construction suivante pour le point de contact P lorsque la tangente PS est donnée :

La droite qui joint le point de rebroussement R *au point de rencontre* S *de la tangente donnée et de la tangente* IT *au point d'inflexion* I, *coupant au point* S″ *la parallèle menée par le point* T *à la droite* RI, *il suffit de prendre le point* U″ *tel que* $TU'' = \frac{2}{3} TS''$ *et de tirer* RU″. *Cette droite coupe la tangente donnée au point de contact* P *cherché.*

Lors donc qu'en outre du triangle IRT on donne, pour déterminer la cubique cuspidale, non plus un point, mais une tangente, il suffit, par la construction qui vient d'être énoncée, de construire le point de contact de cette tangente pour être ramené au cas précédent.

7. On peut encore au sujet de la formule (9), faire les remarques suivantes :

1° Prenons sur la cubique le point P_1 tel que RP_1 soit parallèle à IT ; le point U est alors rejeté à l'infini, et la formule (9) se réduit à

$$\frac{TI}{S_1 I} = -\frac{1}{2}.$$

On a donc ce théorème :

Si la parallèle à la tangente d'inflexion menée par le point de rebroussement coupe la cubique cuspidale au point P_1, *la tangente en* P_1 *coupe la tangente d'inflexion en un point* S_1 *tel que* $IS_1 = 2TI$.

2° Considérons maintenant le point P_2 où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion IT. Dans ce cas, c'est le point S_2 qui est rejeté à l'infini, et la formule (9) se réduit à

$$\frac{TI}{TU_2} = -\frac{1}{2}.$$

De là ce théorème :

La droite qui joint le point de rebroussement au point P_2, *où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion, coupe celle-ci en un point* U_2 *tel que* $TU_2 = 2IT$.

On voit que ce point U_2 est la symétrique du point S_1 précédemment défini par rapport au milieu de IT.

3° Lorsque le point d'inflexion est à l'infini, la formule (9) se réduit à

$$\frac{SU}{TU} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, pour les cubiques cuspidales ayant une asymptote d'inflexion :

Si l'asymptote d'inflexion coupe en T *la tangente au point de rebroussement* R, *en* U *la droite* PR *et en* S *la tangente en* P, *on a* $US = \frac{TU}{2}$.

4° Enfin, si le point T est rejeté à l'infini, la formule (9) devient

$$\frac{\mathrm{SU}}{\mathrm{SI}} = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

Si, dans une cubique cuspidale, les tangentes au point d'inflexion I *et au point de rebroussement* R *sont parallèles, la tangente au point d'inflexion coupe la droite* PR *en un point* U *et la tangente en* P *en un point* S, *tels que* $\mathrm{IS} = \frac{2}{3}\,\mathrm{IU}$.