E.-N. BARISIEN

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 446-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__446_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1892 (¹);

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE E.-N. BARISIEN.

I. L'équation générale des coniques doublement tangentes au cercle C aux points d'intersection de ce cercle avec la droite $y - mx = 0$ est

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 1) + (y - mx)^2 = 0.$$

Pour exprimer que cette conique est tangente à la droite D, remplaçons dans cette équation y par

$$(x+1)\sqrt{3},$$

et écrivons que l'équation du second degré en x ainsi obtenue a une racine double. On trouve ainsi

$$\lambda = -\frac{(m^2+3)}{2}.$$

(¹) *Voir* p. 301.

L'équation générale des coniques (A) est donc

$$(A)\qquad (m^2+3)(x^2+y^2-2x-1)-2(y-mx)^2=0.$$

II. Par un point $M(\alpha, \beta)$ du plan, il passe deux coniques de l'espèce A, puisque

$$(1)\qquad (m^2+3)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha-1)-2(\beta-m\alpha)^2=0$$

est une équation du second degré en m, donnant deux racines m' et m'', lesquelles correspondent aux coniques A′ et A″. Cette équation développée s'écrit

$$m^2(\beta^2-\alpha^2-2\alpha-1)+4m\alpha\beta+3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-3=0.$$

Les valeurs de m' et m'' seront réelles si

$$4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2-\beta^2+2\alpha+1)(3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-3)>0$$

ou

$$(3\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)+4\beta^2(2\alpha+1)-3(2\alpha+1)^2>0.$$

Le premier membre de cette inégalité représente une quartique ayant deux asymptotes parallèles l'une à la droite D, l'autre à la symétrique de D par rapport à l'axe des x. Elle est tangente à l'axe des x au point où la droite D rencontre cet axe et elle coupe encore cet axe aux mêmes points que le cercle C. Cette quartique coupe aussi l'axe des y aux mêmes points que le cercle C et la droite D.

Pour que les valeurs m' et m'' soient réelles, il faut donc que le point M soit situé dans la région positive de cette quartique.

Le déterminant de la conique (A) a pour expression

$$\Delta=(m^2+3)(m^2-1).$$

Suivant que (m^2-1) sera positif, négatif ou nul, la conique A correspondante sera du genre hyperbole, ellipse ou parabole.

On voit incidemment qu'en faisant $m=\pm 1$ dans l'équation (1), on aura le lieu des points (α, β) tels que l'une des coniques A passant par ces points soit une parabole. On trouve ainsi que ce lieu se compose des deux paraboles

$$(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha + 2,$$
$$(\alpha - \beta)^2 = 4\alpha + 2.$$

III. Les équations des deux coniques A' et A'' sont

$$(A') \quad (m'^2 + 3)(x^2 + y^2 - 2x - 1) - 2(y - m'x)^2 = 0,$$
$$(A'') \quad (m''^2 + 3)(x^2 + y^2 - 2x - 1) - 2(y - m''x)^2 = 0.$$

Elles peuvent s'écrire, en tenant compte de la relation (1),

$$(\beta - m'\alpha)^2(x^2 + y^2 - 2x - 1) - (y - m'x)^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1) = 0,$$
$$(\beta - m''\alpha)^2(x^2 + y^2 - 2x - 1) - (y - m''x)^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1) = 0.$$

Or, par la combinaison de ces deux dernières équations, on peut former la suivante

$$(y - m'x)^2(\beta - m''\alpha)^2 - (y - m''x)^2(\beta - m'\alpha)^2 = 0.$$

C'est une conique passant par les quatre points d'intersection de A' et de A''. On voit immédiatement qu'elle se compose des deux droites

$$(2) \quad (y - m'x)(\beta - m''\alpha) - (y - m''x)(\beta - m'\alpha) = 0,$$
$$(3) \quad (y - m'x)(\beta - m''\alpha) + (y - m''x)(\beta - m'\alpha) = 0.$$

Mais l'équation (2) développée devient, après qu'on a enlevé le facteur étranger $(m' - m'')$,

$$(2)' \qquad \alpha y - \beta x = 0.$$

En développant de même (3) et remplaçant $(m' + m'')$ et $m'm''$ par les valeurs

$$m' + m'' = \frac{-4\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1}, \qquad m'm'' = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 3}{\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1},$$

tirées de (1), on trouve

$$(3)' \qquad \beta y + 3\alpha x = 0.$$

La droite $(2)'$ qui passe déjà par le point M rencontre donc les coniques A′ ou A″ en un second point M_1. La droite $(3')$ rencontrera ces coniques aux deux points M_2 et M_3.

Pour avoir les coordonnées de M_1, M_2 et M_3, il faut donc chercher l'intersection des droites $(2)'$ et $(3)'$ avec une conique quelconque passant par les points de rencontre de A′ et A″. Or, en retranchant l'une de l'autre les équations (A′) et (A″), supprimant le facteur $(m' - m'')$ et remplaçant $(m' + m'')$ par sa valeur tirée de (3), on obtient l'hyperbole équilatère

$$(4) \qquad \alpha\beta(y^2 - x^2 - 2x - 1) - xy(\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1) = 0.$$

C'est donc avec cette hyperbole (4) que nous allons chercher les points d'intersection des droites $(2)'$ et $(3)'$.

Coordonnées du point M_1. — Éliminons y entre $(2)'$ et (4), nous obtenons une équation du second degré en x. En tenant compte que l'une des racines est α, on trouve pour les coordonnées x_1 et y_1 de M_1

$$(M_1) \qquad x_1 = -\frac{\alpha}{2\alpha + 1}, \qquad y_1 = -\frac{\beta}{2\alpha + 1}.$$

Coordonnées des points M_2 *et* M_3. — En éliminant de même y entre $(3)'$ et (4), on obtient pour les coordonnées de M_2 et M_3

$$(M_2) \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\beta\left[\beta + \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{-3\alpha\left[\beta + \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \end{cases}$$

$$(M_3) \qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{\beta\left[\beta - \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \\[2ex] y_3 = \dfrac{-3\alpha\left[\beta - \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}. \end{cases}$$

Il est à remarquer que, si le point (α, β) est sur l'ellipse $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1 = 0$, les deux coniques A' et A'' sont tangentes entre elles au point $x = -1$, $y = \frac{3\alpha}{\beta}$.

IV. L'équation de l'hyperbole équilatère passant par $MM_1M_2M_3$ est toute formée : c'est l'équation (4). Il est facile de voir que cette hyperbole, quel que soit le point (α, β), passe par les deux points situés sur l'axe des y et ayant pour ordonnées ± 1, et qu'elle est tangente à l'axe des x, au point de rencontre de la droite D avec cet axe. Cette hyperbole passe donc bien par quatre points fixes.

V. Si les cordes de direction m' et m'' sont perpendiculaires, on a

$$m'm'' = -1,$$

et, par suite, la relation

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 2 = 0,$$

ce qui indique que le lieu du point M est le cercle (5).

Si l'on élimine α et β entre les coordonnées de M_1 et l'équation (5), on trouve pour le lieu de M_1 le cercle (5). De même, on retrouve le cercle si l'on élimine α et β entre les équations (3)', (4) et (5). Les quatre points M, M_1, M_2 et M_3 sont donc sur un même cercle, lorsque les cordes de contact de A' et A'' sont perpendiculaires.

Ce résultat était à prévoir : en effet, les axes de chaque conique A sont l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction m; de sorte que, dans le cas où M' et M'' sont perpendiculaires, les deux coniques A' et A'' ont leurs axes parallèles et ont, par suite, leurs points d'intersection sur un même cercle.

Enveloppes des sécantes communes. — La question est ramenée à la suivante :

Étant donné le cercle (5), *on mène par l'origine des coordonnées les deux sécantes* (2)′ *et* (3)′ *qui rencontrent le cercle en* M, M_1, M_2, M_3. *Trouver l'enveloppe des côtés du quadrilatère* $MM_1M_2M_3$. (Il n'y a pas lieu de chercher l'enveloppe des diagonales MM_1 et M_2M_3 de ce quadrilatère, puisque ces droites passent par l'origine.)

Soit donc le cercle

$$x^2+y^2-4x-2=0$$

et

(6) $$ux+vy-1=0$$

l'équation d'un des côtés du quadrilatère. L'équation des deux droites joignant l'origine aux points d'intersection de ce côté avec le cercle (5) est

$$x^2+y^2-4x(ux+vy)-2(ux+vy)^2=0$$

ou

$$x^2(1-4u-2u^2)-4v(1+u)xy+y^2(1-2v^2)=0.$$

Cette équation doit être identifiée avec

$$(3\alpha x+\beta y)(\beta x-\alpha y)=0$$

ou

$$3\alpha\beta x^2+(\beta^2-3\alpha^2)xy-\alpha\beta y^2=0,$$

ce qui donne

$$\frac{1-2u^2-4u}{3\alpha\beta}=\frac{-4v(1+u)}{\beta^2-3\alpha^2}=\frac{1-2v^2}{-\alpha\beta}.$$

Pour avoir la relation liant u à v, on devrait éliminer α et β entre ces trois rapports et l'équation (5). Or, si l'on considère le premier et le troisième rapport, cette élimination se trouve toute faite, et l'on a la relation

(7) $$u^2+3v^2+2u-2=0.$$

On reconnaît là l'équation tangentielle d'une ellipse dont l'équation ponctuelle est

$$2x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0. \tag{8}$$

Les sécantes communes à A′ et A″ enveloppent donc l'ellipse (8).

Espèce des coniques A′, A″. — L'équation (1) devient, en tenant compte de la relation (5),

$$m^2(3\alpha^2 - \beta^2) - 8m\alpha\beta - (3\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Nous avons vu, au commencement de cet article, que c'est l'expression $(m^2 - 1)$ qui par son signe montre l'espèce de la conique. Or, si nous posons

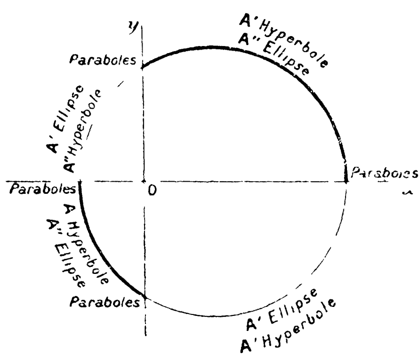
$$\delta = m^2 - 1,$$

nous trouvons pour les valeurs δ' et δ'' correspondant à m' et m''

$$\delta' = \frac{8\alpha\beta}{(3\alpha^2 - \beta^2)^2}\left[4\alpha\beta + \sqrt{16\alpha^2\beta^2 + (3\alpha^2 - \beta^2)^2}\right],$$

$$\delta'' = \frac{8\alpha\beta}{(3\alpha^2 - \beta^2)^2}\left[4\alpha\beta - \sqrt{16\alpha^2\beta^2 - (3\alpha^2 - \beta^2)^2}\right].$$

On voit aisément que, si α et β sont de même signe, la conique A′ est une hyperbole, la conique A″ une el-



lipse. Si α et β sont de signe contraire, c'est A′ qui est une ellipse et A″ une hyperbole.

Quant aux points où le cercle (5) coupe les axes de coordonnées, ils correspondent à deux paraboles, dont les axes sont parallèles aux bissectrices des angles des axes.

On peut encore remarquer que, lorsque $\beta = \alpha\sqrt{3}$, on a

$$m' = 0 \qquad \text{et} \qquad m'' = \infty;$$

les axes des coniques A' et A'' sont alors parallèles aux axes de coordonnées.