Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1893)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 286-289
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__286_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1895).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés deux cercles C et C_1 qui ont même centre A et un troisième cercle S dont le centre est O, on considère les cercles Σ orthogonaux à C et tels que l'axe radical de chacun d'eux et du cercle S touche le cercle C_1.

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles Σ est un cercle S_1.

(*Pour abréger le langage, nous dirons que le cercle* S_1 *correspond au cercle* S.)

2° On suppose que deux cercles C et C_1 sont confondus et l'on propose d'étudier, dans cette hypothèse, la position relative des cercles S et S_1 quand on fait varier le rayon du cercle S, le cercle C et le centre O du cercle S restant fixes.

3° Désignons par S_2 le cercle qui *correspond* à S_1, par S_3 le cercle qui *correspond* à S_2, et ainsi de suite.

En supposant encore les cercles C et C_1 *confondus*, on propose de chercher si le cercle S_n tend vers une position limite quand n augmente indéfiniment, mais seulement dans les hypothèses suivantes :

$$d < R, \qquad d = R, \qquad d = 3R,$$

d représentant la distance AO et R le rayon du cercle C.

Trouver, dans les hypothèses $d = R$ et $d = 3R$, l'expression du rayon du cercle S_n en fonction de R et de n.

Mathématiques spéciales.

On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M.

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S.

Trouver le lieu C des sommets M_1, M_2, M_3 de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D, et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution.

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ en fonction des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H.

Trouver le lieu de ce centre ω lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

4° Démontrer que la droite qui joint le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point G est le milieu de ωI.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Soient R (z) un polynôme du huitième degré, $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ses racines supposées toutes distinctes et différentes de o.

Soient y une fonction de z définie par la relation

$$y^2 = \mathrm{R}(z)$$

et $\pm y_0$ les valeurs de y pour $z = 0$.

On considère l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int_0^x \frac{z^{p-1}\,dz}{y} \qquad (p = 1, 2, 3)$$

obtenue en allant de l'origine au point (x) par un chemin *quelconque*, la valeur de y, pour $z = 0$, étant $+y_0$.

On désigne par I la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* O B x, et par A_j la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* O C a_j allant de l'origine au point (a_j), $(j = 1, 2, \ldots, 8)$.

Cela posé, on propose de démontrer que *toutes* les valeurs que peut prendre V s'obtiennent en ajoutant aux quantités I et $2\mathrm{A}_1 - \mathrm{I}$ des multiples quelconques positifs ou négatifs de *six* constantes ω_j, définies par les relations

$$\omega_1 = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2), \qquad \omega_2 = 2(\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3),$$
$$\omega_3 = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_4), \qquad \omega_4 = 2(\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_5),$$
$$\omega_5 = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_5 - \mathrm{A}_6), \qquad \omega_6 = 2(\mathrm{A}_6 - \mathrm{A}_7).$$

Les constantes ω_j sont appelées les *périodes* de l'intégrale V, et l'on dit que ces périodes sont *distinctes* s'il n'existe entre elles aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

Application. — On suppose que la fonction $\mathrm{R}(z)$ se réduise au trinôme

$$z^8 + az^4 + 1$$

et l'on considère les deux intégrales

$$\omega = \int_0^x \frac{dz}{y}, \qquad \upsilon = \int_0^x \frac{z^2\,dz}{y}.$$

1° Démontrer que, pour chacune de ces intégrales, les six périodes se réduisent à *quatre* distinctes, qui peuvent être mises sous la forme

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad i\Omega_1, \quad i\Omega_2$$

pour l'intégrale ω, et sous la forme

$$\Upsilon_1, \quad \Upsilon_2, \quad i\Upsilon_1, \quad i\Upsilon_2$$

pour l'intégrale υ.

2° Entre les périodes Ω_i et Υ_i on a les relations

$$\Upsilon_1 = \Omega_1, \qquad \Upsilon_2 = i\Omega_2.$$

3° Montrer que l'on peut trouver pour les constantes A et B une infinité de valeurs telles que, pour l'intégrale $A\omega + B\upsilon$, le nombre des périodes se réduise à *deux* distinctes.

Composition de Mécanique rationnelle.

1° Une plaque pesante ABC dont le périmètre contient un segment rectiligne AB s'appuie par ce côté AB sur un plan fixe qui est horizontal et sur lequel AB glisse sans frottement.

Cette plaque, qui est immobile à l'origine du temps, est abandonnée à l'action de la pesanteur.

On demande la condition nécessaire et suffisante pour que, pendant le mouvement, le côté rectiligne AB se déplace parallèlement à sa position initiale.

2° La condition demandée est, en particulier, satisfaite pour une plaque homogène dont le périmètre est une demi-circonférence de cercle.

On considère une plaque homogène, demi-circulaire, dont le rayon est égal à 1^m; on suppose, en outre, qu'à l'origine du temps la plaque est immobile et fait avec le plan horizontal un angle de 30°.

On demande de trouver, dans ces hypothèses particulières, une limite supérieure et une limite inférieure du temps qui s'écoule depuis l'origine jusqu'à l'instant où la plaque semi-circulaire vient coïncider avec le plan horizontal.