NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission à l'École centrale en 1892 (deuxième session). Solution du problème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 403-407
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__403_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1892 (DEUXIÈME SESSION). SOLUTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. J. S.

On donne deux axes rectangulaires et un point A *dont les coordonnées sont* p *et* q. *Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine* *et l'autre un point* C *de l'axe des x dont l'abscisse est a.*

Par le point A *on mène deux sécantes* DAE, FAG *ayant une longueur commune donnée* $2l$ (*les points* D *et* F *sont sur l'une des circonférences, et les points* E *et* G *sont sur l'autre*).

1° *Former l'équation générale des coniques* Δ *passant par les points d'intersection des deux sécantes* DAE, FAG *avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point* C;

2° *Si l'on assujettit une des coniques* Δ *à passer par un point* P *du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point* P;

3° *Déterminer le lieu du centre des coniques* Δ;

4° *En faisant varier l, trouver le lieu du point de rencontre des cordes* DF, EG.

I. Soit

$$y = q + m(x - p)$$

l'équation de la droite FAG, m étant un paramètre à déterminer. Cette droite coupe le cercle O en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_f = \frac{m^2 p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

La droite FAG coupe le cercle C en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_g = \frac{2a + m^2 p - p - 2mq}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{q + 2am - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

Le coefficient angulaire m est déterminé par

$$(x_g - x_f)^2 + (y_g - y_f)^2 = 4l^2,$$

ou

$$4a^2 + 4a^2m^2 = 4l^2(1 + m^2)^2;$$

d'où

$$m = \pm \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l};$$

et la condition de possibilité est $a > l$.

L'équation de FAG est donc

$$y - q = \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}\,(x - p),$$

l'équation de DAE est donc

$$y - q = -\frac{1}{l}\sqrt{a^2 - i^2}\,(x - p).$$

L'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C, sera donc

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[y - q - \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}(x - p)\right] \\ &\times\left[y - q + \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}(x - p)\right] + \lambda x(x - a) = 0, \end{aligned}\right.$$

ou

$$\begin{aligned} &(a^2 - l^2 - \lambda l^2)x^2 - l^2y^2 \\ &\quad - [2p(a^2 - l^2) - \lambda a l^2]x + 2ql^2y + p^2(a^2 - l^2) - l^2q^2 = 0, \end{aligned}$$

λ étant un paramètre indéterminé.

II. En faisant passer l'une des coniques Δ par un point P du plan, on détermine λ, et alors cette conique sera une ellipse si

$$\lambda > \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

une hyperbole si

$$\lambda < \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

une parabole si

$$\lambda = \frac{a^2 - l^2}{l^2}.$$

III. Le lieu des centres des coniques Δ est donné par

$$\Delta'_y = 0 \quad \text{ou} \quad -2l^2y + 2ql^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = q.$$

IV. Les coordonnées du point F sont

$$x_f = \frac{mp^2 - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point G sont

$$x_g = \frac{2a + m^2p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{2am + q - m^2q - 2mp}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point D sont données en changeant m en $-m$,

$$x_d = \frac{mp^2 + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_d = \frac{q + 2mp - m^2q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point E sont trouvées en changeant m en $-m$,

$$x_e = \frac{2a + m^2p + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_e = \frac{-2am + q - m^2q + 2mp}{1 + m^2}.$$

On trouve pour l'équation de la droite DF

$$m^2(qy - px + p^2 + q^2) = px - qy + p^2 + q^2.$$

et pour l'équation de la droite EG

$$m^2[(a-p)x+qy-p(a-p)+q^2]$$
$$=q^2-qy-(a-p)x+(a-p)(2a-p).$$

En éliminant m, on a pour le lieu des points de rencontre de ces deux droites

$$a(ap+q^2-p^2)x+aq(2p-a)y-a(a-p)(p^2+q^2)=0$$

ou

$$(ap+q^2-p^2)x+q(2p-a)y-(a-p)(p^2+q^2)=0,$$

qui est l'équation d'une droite.

N. B. — M. Barisien a aussi résolu la question.