NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. DELENS

Sur une généralisation d'un théorème de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 407-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__407_1>

SUR UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE NEWTON;

PAR M. P. DELENS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rouen.

On doit à Newton le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite avec une courbe algébrique coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette droite avec les asymptotes de la courbe.

Je me propose de démontrer que ce théorème subsiste quand on remplace la droite par une ligne d'ordre supérieur, et qu'il s'étend au centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques quelconques.

Considérons, en effet, deux courbes algébriques C et

C′, d'ordres m et p, et soient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,y)=0 \quad \text{ou} \quad f_m(x,y)+f_{m-1}(x,y)+\ldots=0, \\ \text{et} \\ \varphi(x,y)=0 \quad \text{ou} \quad \varphi_p(x,y)+\varphi_{p-1}(x,y)+\ldots=0 \end{cases}$$

les équations de ces deux courbes dans lesquelles on met en évidence les groupes homogènes des divers degrés. Nous aurons les abscisses des points communs à ces deux courbes en éliminant y entre leurs équations, que nous écrirons pour cela sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 y^m+(a_1 x+a'_1)y^{m-1}+(a_2 x^2+a'_2 x+a''_2)y^{m-2}+\ldots=0 \\ \text{et} \\ b_0 y^p+(b_1 x+b'_1)y^{p-1}+(b_2 x^2+b'_2 x+b''_2)y^{p-2}+\ldots=0. \end{cases}$$

L'équation résultante $R(x)=0$ sera alors

$$R(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 x+a'_1 & a_2 x^2+a'_2 x+a''_2 & a_3 x^3+a'_3 x^2+a''_3 x+a'''_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 x+a'_1 & a_2 x^2+a'_2 x+a''_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 x+b'_1 & b_2 x^2+b'_2 x+b''_2 & b_3 x^3+b'_3 x^2+b''_3 x+b'''_3 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 x+b'_1 & b_2 x^2+b'_2 x+b''_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}=0.$$

On sait que cette équation est en général de degré mp et que le coefficient de son terme de degré le plus élevé est le résultant des deux polynômes $f_m(x,y)$ et $\varphi_p(x,y)$. Je me propose de montrer que le coefficient du terme en x^{mp-1} dans l'équation $R(x)=0$ dépend uniquement des coefficients des polynômes $f_m(x,y)$, $f_{m-1}(x,y)$ et $\varphi_p(x,y)$, $\varphi_{p-1}(x,y)$ [1].

Remarquons pour cela que le déterminant $R(x)$

[1] C'est à cause de cette démonstration différente de la démonstration plus générale de M. Fouret (3e série, t. IX, p. 258) que nous publions cet article, qui reproduit d'ailleurs les théorèmes énoncés par M. Fouret. CH. B.

peut être regardé comme la somme de déterminants partiels dont chacun se déduit du déterminant $R(x)$ en y remplaçant chaque colonne par l'une des files verticales qu'elle comprend. On vérifie d'ailleurs sans peine, par un procédé connu, que chacun de ces déterminants partiels est homogène par rapport à x, et l'on peut, par suite, évaluer facilement son degré.

Cela posé, considérons deux déterminants partiels Δ et Δ_1 qui ne diffèrent entre eux que par la $q^{\text{ième}}$ colonne, cette colonne étant formée dans Δ par la première file de la $q^{\text{ième}}$ colonne de $R(x)$, tandis qu'elle est formée dans Δ_1 par la file correspondante de rang $h+1$; il est manifeste que le degré en x de Δ_1 sera inférieur de h unités au degré en x de Δ, et sera, par suite, $mp-h$ au plus. Il en résulte donc que tous les déterminants partiels de $R(x)$ qui contiendront une ou plusieurs files occupant dans les colonnes correspondantes de ce déterminant un rang supérieur à deux seront de degré au plus égal à $mp-2$ en x; et, par suite, que le coefficient de x^{mp-1} dans l'équation $R(x)=0$ ne dépendra que des coefficients contenus dans les deux premières files verticales de chaque colonne de ce déterminant, c'est-à-dire uniquement des coefficients de $f_m(x, y)$, $f_{m-1}(x, y)$ et $\varphi_p(x, y)$, $\varphi_{p-1}(x, y)$.

Le théorème que nous avons en vue est la conséquence immédiate de cette remarque. Soit, en effet,

$$R(x) = \alpha_0 x^{mp} + \alpha_1 x^{mp-1} + \ldots = 0$$

l'équation qui donne les abscisses des points communs aux deux courbes C et C', et soient (ξ, η) les coordonnées du centre des moyennes distances de ces points; nous aurons la formule

$$\xi = -\frac{\alpha_1}{mp\,\alpha_0},$$

si nous supposons toutefois $\alpha_0 \neq 0$, ce qui revient à admettre que les deux courbes n'ont pas de directions asymptotiques communes; et par suite ξ ne dépendra que des termes des degrés m et $m-1$ de $f(x, y)$ et des termes des degrés p et $p-1$ de $\varphi(x, y)$.

On démontrerait de même que l'ordonnée η ne dépend que de ces mêmes termes au moyen de l'équation $R_1(y) = 0$ obtenue en éliminant x entre les équations (1).

Ainsi le centre des moyennes distances des points communs aux deux courbes C et C' ne change pas quand ces courbes varient de telle sorte que les termes des degrés m, $m-1$ et p, $p-1$ de leurs équations restent les mêmes; en particulier, quand on remplace ces courbes par d'autres admettant les mêmes asymptotes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points d'intersection de deux courbes algébriques n'ayant pas de directions asymptotiques communes ne change pas quand on remplace ces courbes par d'autres admettant respectivement les mêmes asymptotes.

J'indiquerai, pour terminer, quelques applications de ce théorème à des cas particuliers.

1° Si l'une des courbes données est une conique à centre, on peut énoncer la proposition suivante :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque avec une conique de centre fixe ne change pas lorsque cette conique se déforme homothétiquement.

En particulier, si l'on considère un cercle de centre fixe et de rayon variable, on retrouve ainsi un théorème démontré directement par M. M. d'Ocagne ([1]), et dont il a tiré d'intéressantes conséquences.

2° Si l'une des courbes données est une parabole, on est conduit au résultat suivant que nous avons précédemment signalé, et qui peut même être complété comme nous l'avons alors montré ([2]) :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque et d'une parabole ne change pas lorsque cette parabole glisse le long de son axe.

3° Enfin, si l'on considère une courbe *isotropique* dont l'équation soit réductible à la forme

$$(\gamma) \qquad (x^2 + y^2)^m + \varphi_{2m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque et d'une courbe isotropique dont l'équation est réductible à la forme (γ) *ne change pas lorsque cette courbe tourne autour de l'origine.*

On peut citer comme application la lemniscate, et l'on voit ainsi que *le centre des moyennes distances reste le même pour toutes les lemniscates qui admettent le même centre.*

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, p. 295; 1886.

([2]) *Voir* dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, 1893, la Note que nous avons publiée à ce sujet *Sur quelques propriétés de la parabole.*