NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Le reste de la série de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 88-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__88_1>

LE RESTE DE LA SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. E. AMIGUES.

1. M. Darboux a démontré depuis longtemps que le reste de la série de Taylor, dans le cas d'une fonction de variable imaginaire, est susceptible de prendre une forme tout à fait analogue à celle qu'on obtient dans les Cours élémentaires d'Analyse, pour le cas particulier d'une fonction de variable réelle (*Journal de M. Resal*, 1876). Nous pensons qu'il y a quelque intérêt à déduire le résultat de M. Darboux de l'intégrale curviligne qui sert de reste dans la méthode de développement de Cauchy. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette Note.

Nous commencerons par généraliser une formule donnée par M. Darboux dans le Mémoire déjà cité.

Soit L un contour quelconque décrit par la variable z et une intégrale prise le long de ce contour

$$I = \int_L f(z)\,\varphi(z)\,dz.$$

Le module de l'intégrale est au plus égal à la somme des modules de ses éléments. On a donc, en désignant par θ un nombre compris entre o et 1,

$$\operatorname{mod} I = \theta \int_L \operatorname{mod} f(z) \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

μ étant une valeur convenable comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\operatorname{mod} f(z)$; on a

$$\operatorname{mod} \mathrm{I} = \theta\mu \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz.$$

Mais, quand la variable z décrit l'arc L, il y a au moins un point ξ de cet arc pour lequel

$$\operatorname{mod} f(\xi) = \mu.$$

La formule peut donc s'écrire

$$\operatorname{mod} \mathrm{I} = \theta \operatorname{mod} f(\xi) \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz.$$

Soit

$$f(\xi) = e^{\omega i} \operatorname{mod} f(\xi).$$

On a alors

$$\operatorname{mod} \mathrm{I} = \theta e^{-\omega i} f(\xi) \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{I} = \theta e^{(\alpha-\omega)i} f(\xi) \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

ou bien, en posant

$$\lambda = \theta e^{(\alpha-\omega)i},$$

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{I} = \lambda f(\xi) \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

λ étant un facteur dont le module est moindre que 1.

Supposons le cas d'une variable réelle, c'est-à-dire imaginons que la ligne L soit un segment de l'axe des x compris entre a et b ($a < b$). Alors on a

$$\operatorname{mod} dz = dx.$$

Supposons, en outre, que la fonction $\varphi(x)$ soit une fonction réelle, qui demeure positive entre a et b, de façon que l'on ait également

$$\operatorname{mod} \varphi(z) = \varphi(x).$$

La formule (A) devient, dans ce cas,

$$\text{(B)} \qquad I = \lambda f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

et ξ est l'abscisse d'un point du segment de l'axe des x. La formule (B) est la formule de M. Darboux.

2. $f(z)$ étant une fonction monodrome avec dérivée finie, dans une courbe fermée C contenant un cercle de rayon R et de centre a, on sait que l'on a pour tout point

$$x = a + t$$

situé dans ce cercle

$$f(a+t) = f(a) + \frac{t}{1} f'(a) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \mathrm{R},$$

la valeur de R étant donnée par la formule

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \frac{t^n f(z)\, dz}{(z-a)^n (z-a-t)},$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct et le long de la courbe qui contient le cercle. On peut écrire

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n \frac{f(z)\, dz}{z-x}.$$

M. Hermite, partant de cette expression, en déduit, pour le cas des variables réelles, la forme du reste connue sous le nom de *forme de Lagrange*. Nous imiterons d'abord le calcul de M. Hermite (*Cours d'Analyse*, 4e édition, p. 72). Puis nous appliquerons notre formule (A).

La formule (C) persiste quand on déplace le centre a

du cercle sans changer x, pourvu que le cercle ne cesse pas de contenir x ni d'être contenu tout entier dans la courbe C. On peut donc différentier les deux membres de la formule (C), en regardant a comme variable et R comme fonction de a. On a ainsi

$$\frac{dR}{da} = \frac{-n(x-a)^{n-1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

c'est-à-dire, par une formule connue,

$$\frac{dR}{da} = \frac{-(x-a)^{n-1} f^n(x)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

En d'autres termes, en posant

$$G(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{x-u}{z-u}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

on a

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{-(x-u)^{n-1} f^n(u)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

On peut alors intégrer les deux membres, en faisant décrire à la variable u une ligne quelconque située dans la courbe C. Nous prendrons pour ligne d'intégration la droite ax

$$G(x) - G(a) = \int_{ax} \frac{-(x-u)^{n-1} f^n(u)\,du}{1.2\ldots(n-1)};$$

mais on a

$$G(x) = 0, \qquad G(a) = R.$$

Donc

$$\text{(D)} \qquad R = \int_{ax} \frac{(x-u)^{n-1} f^n(u)\,du}{1.2\ldots(n-1)}.$$

On peut écrire ceci

$$1.2\ldots(n-1)\,R = \int_{ax} (x-u)^{n-p} f^n(u)(x-u)^{p-1}\,du.$$

Désignant par ξ un point convenable du segment de droite ax et appliquant la formule (A), on obtient

$$1.2\ldots(n-1)\mathrm{R} = \lambda(x-\xi)^{n-p}f^n(\xi)\int_{ax} \mathrm{mod}(x-u)^{p-1}\,\mathrm{mod}\,du.$$

Or on a

$$(x-\xi)^{n-p} = (x\xi)^{n-p}\,e^{\beta i},$$

et le produit $\lambda e^{\beta i}$ est, comme λ, un facteur de module inférieur à 1, que nous représenterons par λ'. La formule devient alors

$$1.2\ldots(n-1)\,\mathrm{R} = \lambda'(x\xi)^{n-p}f^n(\xi)\int_{ax} \mathrm{mod}(x-u)^{p-1}\,\mathrm{mod}\,du.$$

Le point u décrivant ax, soit α la distance variable xu, on a

$$\mathrm{mod}(x-u) = \alpha, \qquad \mathrm{mod}\,du = d\alpha.$$

D'autre part, en désignant par ρ le module de $(x-a)$, c'est-à-dire la longueur ax, et par θ un nombre compris entre 0 et 1, on a aussi

$$x\xi = \rho(1-\theta).$$

La formule devient alors

$$1.2.3\ldots(n-1)\,\mathrm{R} = \lambda'\rho^{n-p}(1-\theta)^{n-p}f^n(\xi)\int_0^\rho \alpha^{p-1}\,d\alpha,$$

ou bien enfin

$$\mathrm{R} = \lambda'\,\frac{\rho^n}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p}\,f^n(\xi).$$

C'est la formule de M. Darboux. On voit qu'elle ne diffère que par le facteur λ' de la formule relative au cas de la variable réelle.

On trouve d'autres formules, soit en suivant le chemin rectiligne ax, soit en suivant d'autres chemins. Mais elles ne m'ont pas paru intéressantes.