E. GENTY

Solution, par la géométrie vectorielle, du problème de mathématiques spéciales donné au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 99-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__99_1>

SOLUTION, PAR LA GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1892;

PAR M. E. GENTY [1]

Soient

$$S\rho\varphi\rho = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde E, le centre O de cet ellipsoïde étant pris pour origine; σ le vecteur du sommet S du cône Q;

$$S(\rho - \sigma)\psi(\rho - \sigma) = 0$$

l'équation de ce cône; α, β et γ les vecteurs de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E.

Le plan diamétral conjugué, dans le cône, du vecteur α a pour équation

$$S(\rho - \alpha)\psi\alpha = 0,$$

et, si $k\alpha$ est le vecteur du point A, on déterminera k par

[1] *Voir*, pour l'énoncé, *Nouvelles Annales*, page 314, année 1892.

l'équation

$$S(k\alpha - \sigma)\psi\alpha = 0,$$

d'où

$$k = \frac{S\sigma\psi\alpha}{S\alpha\psi\alpha}.$$

Les points A, B et C ont donc respectivement pour vecteurs

$$\frac{S\sigma\psi\alpha}{S\alpha\psi\alpha}\alpha, \quad \frac{S\sigma\psi\beta}{S\beta\psi\beta}\beta \quad \text{et} \quad \frac{S\sigma\psi\gamma}{S\gamma\psi\gamma}\gamma,$$

en sorte que le plan ABC aura pour équation

$$(1) \quad S\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}V\beta\gamma + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}V\gamma\alpha + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}V\alpha\beta\right) = S\alpha\beta\gamma.$$

Mais, α, β et γ étant trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, on a

$$V\beta\gamma = k\varphi\alpha$$

ou, en projetant avec α,

$$S\widehat{\alpha\beta\gamma} = k.$$

On aura donc

$$V\beta\gamma = \varphi\alpha\, S\alpha\beta\gamma,$$
$$V\gamma\alpha = \varphi\beta\, S\alpha\beta\gamma,$$
$$V\alpha\beta = \varphi\gamma\, S\alpha\beta\gamma.$$

D'après cela, l'équation (1) du plan P pourra se mettre sous la forme

$$S\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}\varphi\alpha + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}\varphi\beta + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}\varphi\gamma\right) = 1$$

ou

$$(2) \quad S\varphi\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}\alpha + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}\beta + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}\gamma\right) = 1.$$

Je dis maintenant que la somme

$$S\alpha\psi\alpha + S\beta\psi\beta + S\gamma\psi\gamma$$

est constante.

En effet, α, β et γ étant trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, si l'on pose

$$\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha = \alpha_1,$$
$$\varphi^{\frac{1}{2}}\beta = \beta_1,$$
$$\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma = \gamma_1;$$

d'où

$$\alpha = \varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1,$$
$$\beta = \varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1,$$
$$\gamma = \varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1,$$

α_1, β_1, γ_1 seront trois orienteurs rectangulaires, et l'on aura

$$\begin{aligned} &S\alpha\psi\alpha + S\beta\psi\beta + S\gamma\psi\gamma \\ &\quad = S\alpha_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1 + S\beta_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1 + S\gamma_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1 = m_2,\end{aligned}$$

m_2 étant une constante (1).

Ceci établi, on voit immédiatement que le plan représenté par l'équation (2) passe par le point fixe F ayant pour vecteur

$$\frac{\varphi^{-1}\psi\sigma}{m_2}.$$

Si le cône Q se déplace en restant égal et parallèle au cône fixe K ayant pour équation

$$S\rho\psi\rho = 0,$$

la droite FS ne dépend que du vecteur σ, c'est-à-dire de trois paramètres arbitraires, et, par suite, elle décrit un complexe dont il est facile de trouver l'équation.

Si, en effet, υ et $V\alpha\upsilon$ sont les coordonnées de cette

(1) La condition $m_2 = 0$ exprime que le cône ayant pour équation $S\rho\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\rho = 0$ est équilatère.

droite [1], on aura

$$(m_2 - \varphi^{-1}\psi)\sigma = \upsilon,$$

d'où

$$\sigma = (m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon;$$

on a d'ailleurs

$$S\alpha\upsilon\sigma = 0$$

et, par suite,

$$(3) \qquad S\alpha\upsilon(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

Soient OL, OM et ON les vecteurs racines de l'équation vectorielle

$$(4) \qquad (m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon = S\upsilon,$$

on peut énoncer immédiatement les propriétés suivantes du complexe représenté par l'équation (3).

Toute droite passant par l'origine, ou parallèle à l'une des arêtes du trièdre OLMN, fait partie du complexe.

Toute droite située dans l'une des faces de ce trièdre, ou dans le plan de l'infini, fait aussi partie du complexe.

La surface singulière du complexe se compose donc des trois faces de ce trièdre et du plan de l'infini.

L'équation (4) donne d'ailleurs

$$\upsilon = S(m_2 - \varphi^{-1}\psi)\upsilon$$

ou

$$\varphi\upsilon = S(m_2\varphi - \psi)\upsilon$$

ou

$$\psi\upsilon = \frac{m_2 S - 1}{S}\varphi\upsilon,$$

et l'on voit que les vecteurs OL, OM et ON ne sont

---

[1] υ est parallèle à la direction de la droite, et α le vecteur de l'un quelconque de ses points [(voir *Memoire sur les complexes du second ordre* (Genty, *Journal de Resal*, p. 299; 1882)].

autres que les diamètres conjugués communs de l'ellipsoïde E et du cône K.

Nous obtiendrons l'équation du cône du complexe ayant le point de vecteur ω pour sommet, rapporté à ce point pris pour origine, en remplaçant dans l'équation (3) υ par ρ et α par ω, ce qui donne

$$S\omega\rho(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\rho = 0$$

ou

$$S\omega\rho(m_2\varphi - \psi)^{-1}\varphi\rho = 0$$

ou encore

$$S\varphi\rho(m_2\varphi - \psi)\omega(m_2\varphi - \psi)\rho = 0$$

ou enfin

$$S\varphi\rho\psi\rho(m_2\varphi - \psi)\omega = 0,$$

équation d'un cône du second ordre, qui, ainsi que cela doit être, passe par le centre de l'ellipsoïde E et contient les parallèles menées par son sommet aux diamètres conjugués communs de cet ellipsoïde et du cône K.

Cherchons maintenant la courbe G, enveloppe des droites du complexe situées dans un plan H, ayant pour équation

$$S\nu\rho = p,$$

où ν est orienteur.

Si nous remplaçons υ par $V\rho\nu$ et $V\alpha\upsilon$ par ρ dans l'équation (3), il vient

$$(5) \qquad S\rho(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}V\rho\nu = 0.$$

C'est l'équation d'un cône quadrique R, réciproque du cône C ayant son sommet à l'origine et pour base la courbe G.

Cette courbe G est évidemment une parabole, puisque, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, l'une de ses tangentes est située tout entière à l'infini. On le reconnaît d'ailleurs directement, en remarquant que le cône R contient la perpendiculaire ν abaissée de son sommet sur le plan H.

Soient α le vecteur du foyer de cette parabole, λ et μ deux orienteurs rectangulaires situés dans son plan ; le plan mené par le vecteur α et l'un des points isotropes du plan H doit être tangent au cône C ; ou, ce qui est la même chose, la normale à ce plan, qui a pour vecteur

$$V\alpha(\lambda + i\mu),$$

doit être située sur le cône R.

Or l'équation (5) de ce cône peut s'écrire

$$S\rho\nu(m_2 - \psi\varphi^{-1})^{-1}\rho = 0$$

ou

$$S\rho\nu\Phi\rho = 0, \tag{6}$$

en posant

$$(m_2 - \psi\varphi^{-1})^{-1} = \Phi,$$

et si l'on remplace dans l'équation (6) ρ par

$$V\alpha(\lambda + i\mu),$$

on aura

$$S(\lambda + i\mu)(\Phi V\alpha\lambda + i\Phi V\alpha\mu) = 0$$

ou, en développant et égalant séparément à zéro la partie imaginaire du premier membre de l'équation,

$$S\lambda\Phi V\alpha\lambda - S\mu\Phi V\alpha\mu = 0,$$
$$S\mu\Phi V\alpha\lambda + S\lambda\Phi V\alpha\mu = 0.$$

ou enfin, en remplaçant α par ρ, et désignant selon l'habitude par Φ' la fonction conjuguée de Φ,

$$\left\{\begin{array}{l} S\rho(V\lambda\Phi'\lambda - V\mu\Phi'\mu) = 0, \\ S\rho(V\lambda\Phi'\mu + V\mu\Phi'\lambda) = 0. \end{array}\right. \tag{7}$$

En joignant à ces deux équations la relation

$$\widehat{\nu\rho} = p, \tag{8}$$

on aura trois équations du premier degré pour déterminer ρ.

Les équations (7) étant indépendantes de p, la droite qu'elles représentent est le lieu des foyers des courbes du complexe situées dans les plans parallèles au plan (8).

De ces deux équations on tire

$$\begin{aligned}\rho &= k\mathrm{V}(\mathrm{V}\mu\Phi'\lambda + \mathrm{V}\lambda\Phi'\mu)(\mathrm{V}\lambda\Phi'\lambda - \mathrm{V}\mu\Phi'\mu)\\ &= k(\Phi'\lambda\mathrm{S}\lambda\mu\Phi'\lambda - \mu\mathrm{S}\mu\Phi'\lambda\Phi'\mu\\ &\qquad - \lambda\mathrm{S}\lambda\Phi'\lambda\Phi'\mu + \Phi'\mu\mathrm{S}\lambda\mu\Phi'\mu),\end{aligned}$$

ou, en désignant par m l'invariant bien connu de la fonction Φ,

$$\begin{aligned}\rho &= k[\Phi'\lambda\mathrm{S}\lambda\Phi\nu + \Phi'\mu\mathrm{S}\mu\Phi\nu - m(\lambda\mathrm{S}\lambda\Phi^{-1}\nu + \mu\mathrm{S}\mu\Phi^{-1}\nu)]\\ &= k[\Phi'(\Phi\nu - \nu\mathrm{S}\nu\Phi\nu) - m(\Phi^{-1}\nu - \nu\mathrm{S}\nu\Phi^{-1}\nu)]\\ &= k(\Phi'\mathrm{V}\mathrm{V}\nu\Phi\nu.\nu - m\mathrm{V}\mathrm{V}\nu\Phi^{-1}\nu.\nu).\end{aligned}$$

Si l'on porte cette valeur de ρ dans l'équation (8), il vient

$$p = k\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu,$$

d'où

$$k = \frac{p}{\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu};$$

on a donc, pour le vecteur du foyer,

$$\rho = p\,\frac{m\mathrm{V}\nu\mathrm{V}\nu\Phi^{-1}\nu - \Phi'\mathrm{V}\nu\mathrm{V}\nu\Phi\nu}{\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu}.$$

Cherchons maintenant le lieu des foyers lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

On peut supposer que λ est l'orienteur de cette droite, et l'on obtiendra le lieu cherché en éliminant μ entre les équations (7) et les deux équations suivantes :

$$\mathrm{S}\lambda\mu = 0. \tag{9}$$

$$\mathrm{T}^2\mu = 1. \tag{10}$$

De la seconde des équations (7) et des équations (9) et (10), on tire

$$\mu = \frac{\mathrm{V}\lambda(\Phi\mathrm{V}\rho\lambda - \mathrm{V}\rho\Phi'\lambda)}{\mathrm{T}\mathrm{V}\lambda(\Phi\mathrm{V}\rho\lambda - \mathrm{V}\rho\Phi'\lambda)}.$$

Portant cette valeur de μ dans la première des équations (7), il vient

$$\begin{aligned} &S\rho\lambda\Phi'\lambda T^2 V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda) \\ &\quad = S\rho V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda)\Phi' V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda), \end{aligned}$$

équation d'un cône du troisième ordre.