

E. CESÀRO

**Sur une note de géométrie infinitésimale**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 102-106

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_102\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__102_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR UNE NOTE DE GEOMETRIE INFINITESIMALE;**

PAR M. E. CESÀRO

---

Les courbes rappelées par M. Husquin de Rhéville dans un article des *Nouvelles Annales* <sup>(1)</sup> sont les *spirales sinusoides*, et la propriété énoncée à la fin de l'article a été déjà signalée par plus d'un auteur <sup>(2)</sup>. Les spirales sinusoides sont caractérisées par l'équation intrinsèque

$$s - k \int \sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^m - 1} d\sigma$$

pour  $m = 1 + k$ . La même équation représente, pour  $m = 2k$ , les *lignes de Ribaucour*. Elle représente aussi, quel que soit  $k$ , les *lignes cycloïdales* pour  $m = -2$ , les *alcysoïdes* <sup>(3)</sup> pour  $m = 1$ , les *alcysoïdes d'égalé ré-*

---

<sup>(1)</sup> *Nouvelles Annales*, p. 143; 1890

<sup>(2)</sup> *Ibid.*, p. 185; 1888.

<sup>(3)</sup> *Ibid.*, p. 75; 1880

*sistance* pour  $m = 2$ , etc. Les développées de toutes ces courbes ont pour équation intrinsèque

$$(1) \quad \rho = \frac{s}{k} \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^m - 1}.$$

On les rencontre souvent dans les recherches de Géométrie infinitésimale, mais on prend rarement la peine de s'assurer de leur identité. Par exemple, les courbes étudiées par MM. Nies et Müller dans les *Programmes* des Gymnases de Darmstadt et Berlin (1) ne sont autres que les *développées des lignes de Ribaucour*. Elles sont définies, dans les travaux en question, par la propriété suivante :

$$(2) \quad s = ax^\mu.$$

Or on a, en différentiant cette égalité par rapport à  $s$ ,

$$\mu \cos \varphi = a^{-\frac{1}{\mu}} s^{\frac{1}{\mu}-1},$$

$\varphi$  étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses; puis, par une nouvelle différentiation,

$$\rho = \frac{\mu s}{\mu - 1} \tan \varphi.$$

L'élimination de  $\varphi$  entre les deux dernières égalités donne

$$\rho = \frac{\mu s}{\mu - 1} \sqrt{\mu^2 a^{\frac{2}{\mu}} s^{\frac{2}{\mu}-\frac{2}{\mu}-1}}.$$

Pour une valeur convenable de  $a$ , cette équation peut coïncider avec (1), pourvu qu'on suppose

$$k = 1 - \frac{1}{\mu}, \quad m = \mu k.$$

(1) *Bulletin de Darboux*, p. 58 (I<sup>re</sup> Partie); 1890.

Il n'y a donc que les développées des lignes de Ribaucour, dont la longueur puisse s'exprimer par une puissance de l'abscisse. Du reste cette propriété est contenue dans quelques formules d'un travail antérieur à celui de M. Müller (1). Si l'on observe que

$$\frac{k+1}{k-1} = 1 - 2\mu,$$

on peut préciser davantage en disant que la courbe définie par la propriété (2) est la développée de la ligne de Ribaucour dont l'indice est  $1 - 2\mu$ . On sait que cette dernière ligne possède dans son plan une droite (*directrice*) interceptant sur chaque normale un segment égal à  $(1 - \mu)\rho$ . La courbe (2) est donc une *cycloïde* pour  $\mu = \frac{1}{2}$ , une *hypocycloïde à quatre rebroussements* pour  $\mu = \frac{2}{3}$ , une *développée de parabole* pour  $\mu = \frac{3}{2}$ , une *développée de chaînette* pour  $\mu = 2$ , etc. Il est d'ailleurs aisé de trouver une propriété géométrique des lignes (2), qui puisse servir de définition. Par rapport à la tangente et à la normale en un point quelconque de la ligne de Ribaucour, dont l'indice est  $1 - 2\mu$ , l'équation de la directrice est

$$(\mu - 1)\rho_1 x + \mu\rho_1 y + \mu(\mu - 1)\rho^2 = 0,$$

$\rho_1$  étant le rayon de courbure de la développée. La droite qui rencontre orthogonalement la directrice sur la normale à la courbe intercepte donc sur la normale à la développée un segment égal à  $(1 - \mu)\rho_1$ . En conséquence, les courbes (2) peuvent être définies en disant que *leur rayon de courbure est proportionnel au segment que la perpendiculaire élevée à une droite fixe, par le pied de la tangente, intercepte sur la normale.*

---

(1) *Nouvelles Annales*, p. 180; 1888.

Si nos souvenirs sont exacts, ces courbes ont été étudiées, il y a longtemps, par M. Bassani (1). A vrai dire, la dernière propriété n'appartient pas exclusivement aux courbes (2). Pour le montrer, prenons la droite fixe pour axe des ordonnées, et appelons  $x$  l'abscisse du point de la courbe, qu'on prend pour origine mobile. Soit  $\varphi$  la rotation que doivent subir les axes mobiles pour devenir parallèles aux axes fixes. On exprime l'immobilité de ces axes par les relations

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{dx}{ds} = -\cos\varphi,$$

et l'on met le problème en équation en écrivant

$$\frac{\text{tang}\varphi}{\rho} = (\mu - 1) \frac{\cos\varphi}{x}.$$

d'où l'on déduit, par intégration,

$$\cos\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\mu};$$

puis

$$s = -\int \frac{dx}{\cos\varphi} = -\int \left(\frac{x}{a}\right)^{\mu-1} dx.$$

Tant que  $\mu$  n'est pas nul, on retrouve les courbes (2); mais, pour  $\mu = 0$ , on obtient

$$s = a \log \frac{a}{x}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{a} = e^{-\frac{s}{a}},$$

puis

$$\rho = a \text{ tang}\varphi = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

C'est l'équation d'une *tractrice*. Plus généralement, les lignes dont les centres de courbure ont pour projections, orthogonales ou obliques, sur une droite fixe, les pieds

---

(1) *Journal de Battaglini*, passim.

des tangentes, sont les *développantes de chaînette*. Rappelons, pour finir, que ces courbes sont comprises parmi celles qui, d'après M. Hazzidakis (1), peuvent engendrer, par un mouvement convenable, des surfaces dont elles sont à chaque instant lignes de courbure.