

WORONTZOFF

**Sur le développement en séries des  
fonctions implicites**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 167-184

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_167\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__167_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS  
IMPLICITES;**

PAR M. WORONTZOFF.

---

**1. Soient**

$$f_0(\mathcal{Y}), f_1(\mathcal{Y}), f_2(\mathcal{Y}), \dots f_m(\mathcal{Y})$$

des fonctions algébriques ou transcendentes bien déterminées,  $r$  une racine simple de l'équation  $f_0(\gamma) = 0$  et

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \gamma &= a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \dots \\ &\quad - \frac{a_n}{1.2.3 \dots n} x^n + R = a + X \end{aligned} \right.$$

une racine commune des équations

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f_0(\gamma) + x f_1(\gamma) + x^2 f_2(\gamma) \\ + x^3 f_3(\gamma) + \dots + x^m f_m(\gamma) = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \gamma - r + x F_1(\gamma) + x^2 F_2(\gamma) \\ + x^3 F_3(\gamma) + \dots + x^m F_m(\gamma) = 0. \end{aligned} \right.$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \frac{f_1(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, & F_2(\gamma) &= \frac{f_2(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \\ F_3(\gamma) &= \frac{f_3(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, & \dots, & & F_m(\gamma) &= \frac{f_m(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \\ \Phi(\gamma) &= \frac{f_0(\gamma)}{\gamma - r}, & \Phi(r) &= f_0(r), & \Phi^n(r) &= \frac{f_0^{(n+1)}(r)}{n+1}. \end{aligned}$$

Nous nous proposons ici de déterminer les coefficients

$$a, \quad \frac{a_1}{1!}, \quad \frac{a_2}{2!}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{n!},$$

dans la série (1).

2. Si  $F(u)$ ,  $F'(u)$ ,  $\dots$ ,  $F^{(n+1)}(u)$ , pour les valeurs de  $u$  comprises entre  $u_0 = f(\xi)$  et  $u = f(\xi + z)$ , et  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n+1)}(t)$ , pour les valeurs de  $t$  comprises entre  $t_0 = \xi$  et  $t = \xi + z$ , sont des fonctions finies et continues, on a

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &F[f(\xi + z)] \\ &= \left\{ F(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1} F'(u_0) + \dots \right. \\ &\quad + \frac{(u - u_0)^n}{1.2 \dots n} F^{(n)}(u_0) \\ &\quad \left. + \frac{(u - u_0)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} F^{(n+1)}[u_0 + \theta(u - u_0)] \right\}_{u=f(\xi+z), u_0=f(\xi)}. \end{aligned} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & f(\xi + z) \\ &= f(\xi) + z f'(\xi) + z^2 \frac{f''(\xi)}{2!} + \dots \\ &\quad + z^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!} \\ &= C + C_1 z + \frac{C_2}{2!} z^2 + \frac{C_3}{3!} z^3 + \dots \\ &\quad + \frac{C_n}{n!} z^n + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!}, \end{aligned} \right.$$

où

$$C = f(\xi), \quad C_n = f^{(n)}(\xi).$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (4),  $f(\xi + z)$  par la série (5), on obtient

$$F[f(\xi + z)] = F[f(\xi)] + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \dots + q_n z^n - \dots$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} & D_{\xi}^n F[f(\xi + z)] \Big|_{z=0} \\ & \quad 1.2 \dots n \\ &= q_n = \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \left( \frac{c_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{c_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{c_3}{3!} \right)^{\alpha_3} \dots \left( \frac{c_n}{n!} \right)^{\alpha_n}, \end{aligned} \right.$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Mais

$$D_{\xi}^n F[f(\xi + z)] = D_{\xi}^n F[f(\xi + z)].$$

$$\left\{ D_{\xi}^n F[f(\xi + z)] \Big|_{z=0} = \left\{ D_{\xi}^n F[f(\xi + z)] \Big|_{z=0} = D_{\xi}^n F[f(\xi)]; \right.$$

par conséquent

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & D_{\xi}^n F[f(\xi)] \\ &= n! \sum \frac{F^{(i)}[f(\xi)]}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \dots \alpha_n!} \\ &\quad \times \left[ \frac{f'(\xi)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[ \frac{f''(\xi)}{2!} \right]^{\alpha_2} \left[ \frac{f'''(\xi)}{3!} \right]^{\alpha_3} \dots \left[ \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right]^{\alpha_n} \\ &= n! \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \dots \alpha_n!} \\ &\quad \times \left( \frac{c_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{c_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \left( \frac{c_3}{3!} \right)^{\alpha_3} \dots \left( \frac{c_n}{n!} \right)^{\alpha_n} = D_{\xi}^n F(c), \end{aligned} \right.$$

où

$$1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 3 \alpha_3 + \dots + n \alpha_n = n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(J. BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 308).

3. Maintenant substituons  $a + X$  au lieu de  $y$ , dans les équations (2) et (3), et supposons que les fonctions  $f_0(a + X)$ ,  $f_1(a + X)$ ,  $f_2(a + X)$ ,  $\dots$ ,  $f_m(a + X)$ ,  $F_1(a + X)$ ,  $F_2(a + X)$ ,  $\dots$ ,  $F_m(a + X)$  soient développables suivant les puissances croissantes de  $X$ ; on obtient alors, au moyen de la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}
 & f_0(a) + X f_0'(a) + \frac{X^2}{2!} f_0''(a) + \dots + \frac{X^n}{n!} f_0^{(n)}(a) + R_1 \\
 & + x \left[ f_1(a) + X f_1'(a) + \frac{X^2}{2!} f_1''(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}(a) + R_2 \right] \\
 & + x^2 \left[ f_2(a) + X f_2'(a) + \frac{X^2}{2!} f_2''(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} f_2^{(n-2)}(a) + R_3 \right] \\
 & \dots\dots\dots \\
 (7) \quad & + x^{m-2} \left[ f_{m-2}(a) + X f_{m-2}'(a) + \frac{X^2}{2!} f_{m-2}''(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} f_{m-2}^{(n-m+2)}(a) + R_{m-1} \right] \\
 & + x^{m-1} \left[ f_{m-1}(a) + X f_{m-1}'(a) + \frac{X^2}{2!} f_{m-1}''(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} f_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R_m \right] \\
 & + x^m \left[ f_m(a) + X f_m'(a) + \frac{X^2}{2!} f_m''(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} f_m^{(n-m)}(a) + R_{m+1} \right] = o(n > m)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & a - r + X + x \left[ F_1(a) + X F'_1(a) + \frac{X^2}{2!} F''_1(a) + \dots \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} F_1^{(n-1)}(a) + R'_1 \right] \\
 & + x^2 \left[ F_2(a) + X F'_2(a) + \frac{X^2}{2!} F''_2(a) + \dots \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} F_2^{(n-2)}(a) + R'_2 \right] \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + x^{m-2} \left[ F_{m-2}(a) + X F'_{m-2}(a) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-2}(a) + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} F_{m-2}^{(n-m+2)}(a) + R'_{m-2} \right] \\
 & + x^{m-1} \left[ F_{m-1}(a) + X F'_{m-1}(a) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-1}(a) + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} F_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R'_{m-1} \right] \\
 & + x^m \left[ F_m(a) + X F'_m(a) + \frac{X^2}{2!} F''_m(a) + \dots \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} F_m^{(n-m)}(a) + R'_m \right] = o(n > m),
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

où

$$X = a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n!} x^n + R.$$

De l'identité (7), en y égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de  $x$ , on déduit

$$\begin{aligned}
 & f_0(a) = 0, \\
 & a_1 f'_0(a) + f_1(a) = 0, \\
 & \frac{a_2}{1.2} f'_0(a) + \frac{a_2^2}{1.2} f''_0(a) + a_1 f'_1(a) + f_2(a) = 0, \\
 & \frac{a_3}{1.2.3} f'_0(a) + \frac{a_1 a_2}{1.2} f''_0(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f'''_0(a) \\
 & \quad + \frac{a_2}{1.2} f'_1(a) + \frac{a_2^2}{1.2} f''_1(a) + a_1 f'_2(a) + f_3(a) = 0, \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

en considérant  $a$  comme fonction d'une variable fictive  $\xi$ , dont les dérivées successives seraient  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  et en ayant égard à la formule (6), on a généralement

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} D_{\xi}^p \frac{f_0(a)}{p!} + D_{\xi}^{p-1} \frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ \quad + D_{\xi}^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_{\xi} f_{p-1}(a) + f_p(a) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D_{\xi}^n \frac{f_0(a)}{n!} + D_{\xi}^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + \dots \\ \quad + D_{\xi}^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_{\xi}^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{array} \right.$$

où

$$p \leq m, \quad n \geq m$$

et

$$D_{\xi}^k \frac{f_h}{k!}(a) = \sum \frac{f_h^{(i)}(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$\begin{aligned} 1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \dots + k \alpha_k &= k, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k &= i = 1, 2, 3, \dots, k. \end{aligned}$$

L'identité (8) donne

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} a - r = 0, \\ a_1 - F_1(a) = 0, \\ \frac{a_2}{1.2} + a_1 F_1'(a) + F_2(a) = 0, \\ \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_2}{1.2} F_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F_1''(a) + a_1 F_2'(a) + F_3(a) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{a_p}{p!} + D_{\xi}^{p-1} \frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ \quad + D_{\xi}^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_{\xi} F_{p-1}(a) + F_p(a) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{a_n}{n!} + D_{\xi}^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_{\xi}^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\ \quad + D_{\xi}^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_{\xi}^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{array} \right.$$

où

$$0 < p \leq m, \quad n \geq m$$

et

$$D_{\xi}^k \frac{F_h(\alpha)}{k!} = \sum \frac{F_h^{(i)}(\alpha)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{\alpha_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\alpha_k}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Des égalités précédentes on tire

$$(11) \left\{ \begin{aligned} a &= r, \\ a_1 &= - \left[ \frac{f_1(\alpha)}{f_0'(\alpha)} \right]_{a=r} = - [F_1(\alpha)]_{a=r}, \\ \frac{a_2}{1.2} &= - \left\{ \frac{1}{f_0'(\alpha)} \left[ \frac{a_1^2}{1.2} f_0''(\alpha) + a_1 f_1'(\alpha) + f_2(\alpha) \right] \right\}_{a=r} \\ &= - [a_1 F_1'(\alpha) + F_2(\alpha)]_{a=r}, \\ \frac{a_3}{1.2.3} &= - \left\{ \frac{1}{f_0(\alpha)} \left[ \frac{a_1 a_2}{1.2} f_0''(\alpha) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f_0'''(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2}{1.2} f_1'(\alpha) + \frac{a_1^2}{1.2} f_1''(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_1 f_2'(\alpha) + f_3(\alpha) \right] \right\}_{a=r} \\ &= - \left[ \frac{a_2}{1.2} F_1'(\alpha) + \frac{a_1^2}{1.2} F_1''(\alpha) + a_1 F_2'(\alpha) + F_3(\alpha) \right]_{a=r}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{a_p}{1.2 \dots p} &= - \left( \frac{1}{f_0'(\alpha)} \left\{ \sum \frac{f_0^{(j)}(\alpha)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{p-1}!} \right. \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha_1}{1!}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!}\right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{\alpha_{p-1}}{(p-1)!} \right]^{\beta_{p-1}} \\ &\quad + D_{\xi}^{p-1} \frac{f_1(\alpha)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{f_2(\alpha)}{(p-2)!} + \dots \\ &\quad \left. \left. + D_{\xi}^2 \frac{f_{p-2}(\alpha)}{2!} + D_{\xi} f_{p-1}(\alpha) + f_p(\alpha) \right\} \right)_{a=r} \\ &= - \left[ D_{\xi}^{p-1} \frac{F_1(\alpha)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{F_2(\alpha)}{(p-2)!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + D_{\xi}^2 \frac{F_{p-2}(\alpha)}{2!} + D_{\xi} F_{p-1}(\alpha) + F_p(\alpha) \right]_{a=r} \\ &= - \left[ \sum_{k=1}^{k=p} D_{\xi}^{p-k} \frac{F_k(\alpha)}{(p-k)!} \right]_{a=r} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

( 174 )

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{1 \cdot 2 \dots n} &= - \left\{ \frac{1}{f_0'(a)} \left[ \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{n-1}!} \right. \right. \\
 &\quad \times \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\beta_{n-1}} \\
 &\quad + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{f_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\
 &\quad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} \\
 &\quad \left. \left. + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} \right] \right\}_{a=r} \\
 &= - \left[ D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} \right]_{a=r} \\
 &= - \left[ \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

où

$$n > m \geq p > 0$$

et

$$\begin{aligned}
 1 \beta_1 + 2 \beta_2 + \dots + (p-1) \beta_{p-1} &= p, \\
 \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{p-1} &= j = 2, 3, \dots, p, \\
 1 \beta_1 + 2 \beta_2 + \dots + (n-1) \beta_{n-1} &= n, \\
 \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} &= j = 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
 y = r - \frac{1}{f_0'(r)} \left\{ x f_1(r) + x^2 \left[ S_2 + \sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k} \frac{f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \right. \\
 + x^3 \left[ S_3 + \sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k} \frac{f_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\
 + x^p \left[ S_p + \sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k} \frac{f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\
 \left. + x^n \left[ S_n + \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} + \dots \right\}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$(12) \left\{ \begin{aligned} y &= r - x F_1(r) - x^2 \left[ \sum_{k=1}^{k=2} D_{\xi}^{2-k} \frac{F_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \\ &- x^3 \left[ \sum_{k=1}^{k=3} D_{\xi}^{3-k} \frac{F_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &- x^p \left[ \sum_{k=1}^{k=p} D_{\xi}^{p-k} \frac{F_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &- x^m \left[ \sum_{k=1}^{k=m} D_{\xi}^{m-k} \frac{F_k(a)}{(m-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &- x^n \left[ \sum_{k=1}^{k=n} D_{\xi}^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} - \dots, \end{aligned} \right.$$

où

$$n \geq m, \quad m \geq p > 1,$$

$$\begin{aligned} S_k &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \\ &\times \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} \\ &= \frac{1}{k!} [D_{\xi}^k f_0(a) - a_k f_0'(a)], \end{aligned}$$

$$1 \beta_1 + 2 \beta_2 + \dots + (k-1) \beta_{k-1} = k,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \dots, k;$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} D_{\xi}^k F_h(a) &= D_{\xi}^k \frac{f_h(a)}{\Phi(a)} = D_{\xi}^k \left[ \frac{f_h(a)}{a-r} \right] \\ &= k! \sum \frac{D_a^i F_h(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{a_k}{k!} \right)^{\alpha_k}, \\ \Phi^{(k)}(r) &= \frac{f_0^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{aligned} \right.$$

$$1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \dots + k \alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, \dots, k.$$

En généralisant la première formule (12), on ob-

tient

$$(14) \left\{ \begin{aligned} F(y) &= F(r) + \frac{x}{1} [D_{\xi} F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x^2}{1.2} [D_{\xi}^2 F(a)]_{a=r} + \frac{x^3}{1.2.3} [D_{\xi}^3 F(a)]_{a=r} + \dots \\ &+ \frac{x^q}{1.2\dots q} [D_{\xi}^q F(a)]_{a=r} + \dots \quad (1). \end{aligned} \right.$$

4. Considérons quelques cas particuliers :

1° Si l'on pose

$$\begin{aligned} f_0(y) &= r - y, & f_1(y) &= f(y), \\ f_2(y) &= 0, & f_3(y) &= 0, & \dots, & f_m(y) &= 0, \end{aligned}$$

on a

$$y = r + x f(y)$$

ou

$$x = \frac{y - r}{f(y)} = \varphi(y), \quad F_1(y) = -f(y)$$

et

$$y = \left[ a + x f(a) + \frac{x^2}{1} D_{\xi} f(a) + \frac{x^3}{1.2} D_{\xi}^2 f(a) + \dots + \frac{x^n}{1.2\dots(n-1)} D_{\xi}^{n-1} f(a) + \dots \right]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange, démontrée rigoureusement, dans ces derniers temps, par M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, et *Cours d'Algèbre supérieure* par J.-A. Serret, 1885, t, I, p. 466),

---

(1) Les relations (9) et (10) peuvent être déduites des équations (2) et (3) aussi à l'aide de cette formule, en prenant

$$y = a + \alpha, x = \alpha, \frac{x^2}{1.2} - \dots$$

donne

$$\begin{aligned}
 y &= \left\{ a + x f(a) + \frac{x^2}{1.2} D_a [f(a)]^2 \right. \\
 &\quad + \frac{x^3}{1.2.3} D_a^2 [f(a)]^3 + \dots \\
 &\quad \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} D_a^{n-1} [f(a)]^n + \dots \right\}_{a-r} \\
 &= r + x f(r) + \frac{x^2}{1.2} D_r [f(r)]^2 \\
 &\quad + \frac{x^3}{1.2.3} D_r^2 [f(r)]^3 + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} D_r^{n-1} [f(r)]^n + \dots
 \end{aligned}$$

On a aussi (*Nouvelles Annales*, p. 362; 1888)

$$\begin{aligned}
 y &= \left\{ a + x \left[ \frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right] a - \frac{x^2}{1.2} \left[ \frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right]^2 a + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \left[ \frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right]^n a + \dots \right\}_{a-r}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{n!} &= \left[ D_x^{n-1} \frac{f'(a)}{(n-1)!} \right]_{a-r} \\
 &= \left\{ \sum \frac{f^{(i)}(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \left( \frac{\alpha_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\alpha_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left[ \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}} \right\}_{a-r, \alpha_{n-1}} \\
 &= \left\{ D_a^{n-1} \frac{[f(a)]^n}{n!} \right\}_{a-r} \\
 &= \sum (n-1)! \left[ \frac{f(r)}{(n-i)! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \right]^{n-i} \\
 &\quad \times \left[ \frac{f'(r)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[ \frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_2} \dots \left[ \frac{f^{(n-1)}(r)}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{n!} \left\{ \left[ \frac{1}{\varphi'(a)} D_r \right]^n a \right\}_{a-r},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} &= n-1, \\
 \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} &= i = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

2° Prenons

$$\begin{aligned}
 f_0(y) &= f(y), & f_1(y) &= -1, \\
 f_2(y) &= 0, & \dots, & f_m(y) = 0;
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(y) = x, \quad y = r + x \left[ \frac{1}{\Phi(y)} \right], \quad F_1(y) = - \frac{1}{\Phi(y)}, \\ \Phi(y) = \frac{f(y)}{y-r}, \quad f(r) = 0, \\ \Phi(r) = f'(r), \quad \Phi^k(r) = \frac{f^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y = \left[ a + x \frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^2}{1} D_{\xi} \frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^3}{1.2} D_{\xi}^2 \frac{1}{\Phi(a)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots (n-1)} D_{\xi}^{n-1} \frac{1}{\Phi(a)} + \dots \right]_{a=r}. \end{aligned}$$

La formule de Lagrange donne

$$\begin{aligned} y = \left\{ a + x [\Phi(a)]^{-1} + \frac{x^2}{1.2} D_a [\Phi(a)]^{-2} \right. \\ \left. + \frac{x^3}{1.2.3} D_a^2 [\Phi(a)]^{-3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} D_a^{n-1} [\Phi(a)]^{-n} + \dots \right\}_{a=r}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} y = \left\{ a + x \left[ \frac{1}{f'(a)} D_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[ \frac{1}{f'(a)} D_a \right]^2 a + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \left[ \frac{1}{f'(a)} D_a \right]^n a + \dots \right\}_{a=r}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n}{n!} &= \left\{ D_{\xi}^{n-1} \frac{[\Phi(a)]^{-1}}{(n-1)!} \right\}_{a=r} \\ &= - \left\{ \frac{1}{f'(a)} \sum \frac{f^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{n-1}} \left( \frac{\alpha_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\alpha_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\beta_{n-1}} \right\}_{a=r, n-1} \\ &= \left\{ D_a^{n-1} \frac{[\Phi(a)]^{-n}}{n!} \right\}_{a=r} = \sum \frac{(-1)^i (n+i-1)! [f'(r)]^{-(n+i)}}{n! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \\ &\quad \times \left[ \frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_1} \left[ \frac{f'''(r)}{3!} \right]^{\alpha_2} \dots \left[ \frac{f_n(r)}{n!} \right]^{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{n!} \left\{ \left[ \frac{1}{f'(a)} D_a \right]^n a \right\}_{a=r}, \end{aligned}$$



où les coefficients  $a, a_1, \dots, \frac{a_n}{n!}$  et  $b, b_1, \dots, \frac{b_n}{n!}$  se détermineront au moyen des formules (11), en y remplaçant respectivement

$$f'_0(r), f''_0(r), \dots, f_k(r), f'_k(r), f''_k(r), \dots,$$

par

$$P'_0(r), P''_0(r), \dots, P_k(r), P'_k(r), P''_k(r), \dots,$$

et par

$$Q'_0(r_1), Q''_0(r_1), \dots, Q_k(r_1), Q'_k(r_1), Q''_k(r_1), \dots,$$

et en supposant que  $r, r_1$  soient des racines simples des équations  $P_0(y) = 0, Q_0(u) = 0$  respectivement (J.-A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, 1885, t. I, p. 610).

4° Enfin, posons, dans l'équation (2),  $f_0(y) = r - y$ ; on a alors

$$y = r + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \dots + x^m f_m(y)$$

et

$$\begin{aligned} y = r & \\ & + x f_1(r) + x^2 \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(\alpha)}{(2-k)!} \right]_{\alpha=r} \\ & + x^3 \left[ \sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_{\xi}^{3-k} f_k(\alpha)}{(3-k)!} \right]_{\alpha=r} + \dots \\ & + x^p \left[ \sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_{\xi}^{p-k} f_k(\alpha)}{(p-k)!} \right]_{\alpha=r} + \dots \\ & + x^m \left[ \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} f_k(\alpha)}{(m-k)!} \right]_{\alpha=r} + \dots \\ & + x^n \left[ \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{n-k} f_k(\alpha)}{(n-k)!} \right]_{\alpha=r} + \dots; \end{aligned}$$

ou, généralement,

$$\begin{aligned} F(y) &= F(r) + \frac{x}{1} [D_{\xi} F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x_2}{1.2} [D_{\xi}^2 F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x_3}{1.2.3} [D_{\xi}^3 F(a)]_{a=r} + \dots \\ &+ \frac{x^q}{1.2\dots q} [D_{\xi}^q F(a)]_{a=r} + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left[ \frac{D_{\xi}^q F(a)}{q!} \right]_{a=r} &= \sum \frac{F^{(l)}(r)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_q!} [f_1(r)]^{\alpha_1} \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_2} \dots \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_{\xi}^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_p} \dots \\ &\times \left[ \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{q-k} f_k(a)}{(q-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_q}, \\ &(p \leq m). \end{aligned}$$

§. Soit

$$Y = \alpha + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{1.2} x^2 + \dots + \frac{\alpha_m}{1.2\dots m} x^m + \dots$$

une racine de l'équation générale (algébrique ou transcendante)

$$f(y, x) = 0.$$

Prenons la fonction de  $t$

$$\Phi(t) = f(y, x, t) = f(y, z),$$

où  $z = xt$  et les variables  $y, x$  ne dépendent pas de  $t$ , de sorte que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = x^k \frac{\partial^k f}{\partial z^k},$$

et supposons que cette fonction, pour les valeurs de  $t$

comprises entre 0 et 1, soit développable, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de  $t$ ; on a alors

$$\begin{aligned}
f(y, xt) &= f(y, z) = \psi(t) = \psi(0) + t \psi'(0) \\
&\quad + \frac{t^2}{1.2} \psi''(0) + \dots + \frac{t^m}{1.2\dots m} \psi^{(m)}(0) + \dots \\
&= f(y, 0) + tx [D_z f(y, z)]_{z=0} \\
&\quad + \frac{t^2 x^2}{1.2} [D_z^2 f(y, z)]_{z=0} + \dots \\
&\quad + \frac{t^m x^m}{1.2\dots m} [D_z^m f(y, z)]_{z=0} + \dots,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
f(y, 0) &= f_0(y), \quad [D_z f(y, z)]_{z=0} = f_1(y), \\
\left[ \frac{D_z^2 f(y, z)}{1.2} \right]_{z=0} &= f_2(y), \quad \dots, \\
\left[ \frac{D_z^m f(y, z)}{1.2\dots m} \right]_{z=0} &= f_m(y), \quad \dots,
\end{aligned}$$

on obtient, pour  $t = 1, (z = x)$ ,

$$f(y, x) = f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + \dots + x^m f_m(y) + \dots = 0.$$

Par conséquent, en désignant par  $r$  une racine simple de l'équation  $f(y, 0) = 0$  et en considérant  $a$  comme fonction d'une variable fictive  $\xi$ , dont les dérivées successives seraient  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ , on trouve à l'aide des formules (11), (12)

$$\begin{aligned}
a &= r, \\
a_1 &= - \left[ \frac{D_x f(a, x)}{D_a f(a, x)} \right]_{a=r, x=0}, \\
\frac{a_2}{1.2} &= - \left\{ \frac{1}{D_a f(a, x)} \left[ \frac{a_1^2}{1.2} D_a^2 f(a, x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_1 D_a D_x f(a, x) + \frac{D_x^2 f(a, x)}{1.2} \right] \right\}_{a=r, x=0}, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\frac{a_m}{1.2\dots m} = - \left( \frac{1}{D_a f(a, x)} \left\{ \sum \frac{D_a^j f(a, x)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{m-1}} \right. \right. \\ \times \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{a_{m-1}}{(m-1)!} \right]^{\beta_{m-1}} \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_x^{m-k} D_x^k f(a, x)}{(m-k)! k!} \right\} \right)_{a=r, x=0}$$

et

$$y = r - \frac{1}{[D_a f(a, x)]_{x=0}^{a=r}} \left\{ x [D_x f(a, x)]_{x=0}^{a=r} \right. \\ + x^2 \left[ S'_2 + \sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_x^{2-k} D_x^k f(a, x)}{(2-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} \\ + x^3 \left[ S'_3 + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_x^{3-k} D_x^k f(a, x)}{(3-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} + \dots \\ \left. + x^m \left[ S'_m + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_x^{m-k} D_x^k f(a, x)}{(m-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} + \dots \right\},$$

où

$$S'_k = \sum \frac{D_a^k f(a, x)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} \\ = \frac{1}{k!} [D_x^k f(a, x) - a_k D_a f(a, x)],$$

$$\frac{D_x^k D_x^h f(a, x)}{k! h!} \\ = \sum \frac{D_a^i D_x^h f(a, x)}{h! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left[ \frac{a_k}{k!} \right]^{\alpha_k}, \\ \begin{cases} 1 \beta_1 + 2 \beta_2 + \dots + (k-1) \beta_{k-1} = k, \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \dots, k, \\ 1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \dots + k \alpha_k = k, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Aussi, en ayant égard à l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \left[ D_{\xi}^k f_0(a) - a_k f_0'(a) \right] \\ &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \left( \frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left( \frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[ \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} = S_k, \end{aligned}$$

nous pouvons exprimer une racine de l'équation  $f(y, x) = 0$ , et, par suite, celle de l'équation (2), de la manière suivante

$$\begin{aligned} y = r + x & \left[ \frac{a_1}{1!} - \sum_{k=0}^{k-1} \frac{D_{\xi}^{1-k} f_k(a)}{(1-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} \\ & + x^2 \left[ \frac{a_2}{1!} - \sum_{k=0}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(a)}{(2-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} \\ & + x^3 \left[ \frac{a_3}{1!} - \sum_{k=0}^{k=3} \frac{D_{\xi}^{3-k} f_k(a)}{(3-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} + \dots \\ & + x^m \left[ \frac{a_m}{m!} - \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} f_k(a)}{(m-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} + \dots \end{aligned}$$


---