

G. DARIÈS

**Sur la détermination des trajectoires  
orthogonales de quelques familles de  
courbes planes dont l'équation est donnée  
en coordonnées bi-polaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 283-292

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_283\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13_283_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

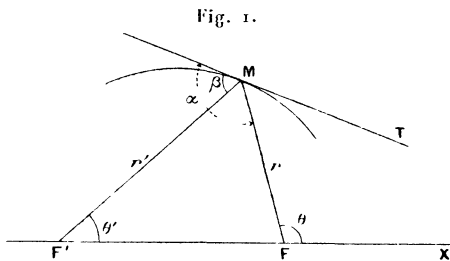
---

**SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES  
DE QUELQUES FAMILLES DE COURBES PLANES DONT  
L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES BI-POLAIRES;**

PAR M. G. DARIÈS,  
Conducteur des Ponts et Chaussées.

—

Considérons une courbe plane (fig. 1) dont l'équation est donnée en coordonnées bi-polaires : désignons



par  $\alpha$  et  $\beta$  les angles de la tangente en un point M avec

---

dont le paramètre sera déterminé par

$$\theta_1 + \frac{\beta}{c} = \frac{2}{c},$$

d'où

$$\theta_1 = -\frac{1}{c}.$$

C'est bien le paramètre du point où la tangente au point  $\frac{1}{c}$  (c'est-à-dire l'asymptote) rencontre la courbe.

les rayons vecteurs  $r$  et  $r'$ ; désignons encore par  $\theta$  et  $\theta'$  les angles polaires  $\text{MFX}$  et  $\text{MF'X}$ . On connaît, et il est facile d'établir, la relation

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{dr}{dr'};$$

il est presque évident que l'on a de même

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r d\theta}{r' d\theta'};$$

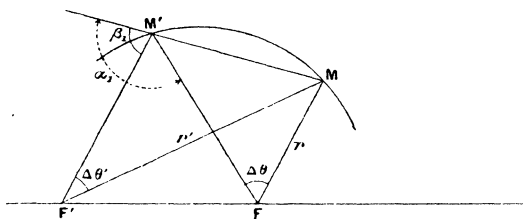
en effet, soit  $M'$  (fig. 2) le point de la courbe voisin de  $M$ ; ses rayons vecteurs sont

$$r + \Delta r, \quad r' + \Delta r',$$

et ses angles polaires

$$\theta + \Delta\theta, \quad \theta' + \Delta\theta'.$$

Fig. 2.



Dans les triangles  $\text{MM'F}$  et  $\text{MM'F'}$ , on a

$$\frac{r}{\sin \alpha_1} = \frac{\text{MM}'}{\sin \Delta\theta}, \quad \frac{r'}{\sin \beta_1} = \frac{\text{MM}'}{\sin \Delta\theta'},$$

d'où

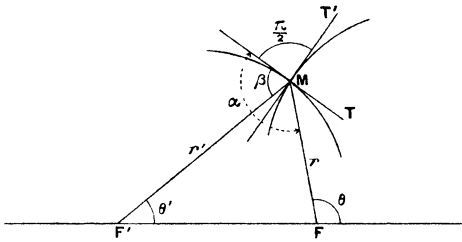
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{r}{r'} \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \Delta\theta'} = \frac{r \Delta\theta}{r' \Delta\theta'} \frac{\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{\sin \Delta\theta'}{\Delta\theta'}},$$

et, à la limite,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r d\theta}{r' d\theta'}.$$

Soient maintenant deux courbes orthogonales se coupant en M (*fig. 3*), en ce point ces courbes ont mêmes

Fig. 3.



coordonnées  $r$  et  $r'$  ou  $\theta$  et  $\theta'$ , mais les angles  $\alpha$  et  $\beta$  de l'une d'elles sont devenus  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  et  $\beta + \frac{\pi}{2}$  pour la seconde; or

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

donc, d'après ce qui précède, pour passer d'une famille de courbes H à la famille orthogonale K, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle de la première le rapport

$$\frac{dr}{dr'}$$

par le rapport

$$\frac{r \, d\theta}{r' \, d\theta'}.$$

Considérons plus particulièrement la famille de courbes dont l'équation bi-vectorielle est

$$f(r, r') = h,$$

$h$  désignant une constante arbitraire; différencions, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial r'} dr' = 0;$$

on a donc pour les trajectoires orthogonales

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial r} r \, d\theta - \frac{\partial f}{\partial r'} r' \, d\theta' = 0;$$

mais dans le triangle  $\text{MFF}'$  on a

$$(2) \quad \frac{r}{r'} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta};$$

si entre les équations (1) et (2) on élimine le rapport  $\frac{r}{r'}$ , l'équation différentielle résultante sera celle des trajectoires orthogonales en coordonnées bi-angulaires, il ne restera plus qu'à l'intégrer.

Donnons quelques exemples.

Soit d'abord

$$f(r, r') = r^n \pm pr'^n = h,$$

on a successivement

$$\begin{aligned} r^{n-1} dr \pm pr'^{n-1} dr' &= 0, \\ r^n d\theta \pm pr'^n d\theta' &= 0, \\ \sin^a \theta' d\theta \pm p \sin^a \theta d\theta' &= 0, \end{aligned}$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^a \theta} \pm p \int \frac{d\theta'}{\sin^a \theta'} = K,$$

$K$  désignant une constante arbitraire.

1.  $n = -1$ ,  $p = 1$ . (Licence. Paris, 1890.) — On a

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h;$$

on trouve pour les trajectoires orthogonales

$$\cos \theta + \cos \theta' = K.$$

2.  $n = 1$ ,  $p = 1$ . — On a

$$r \pm r' = h,$$

ellipses et hyperboles homofocales.

On obtient

$$\log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \pm \log \operatorname{tang} \frac{\theta'}{2} = \log h,$$

hyperboles et ellipses homofocales.

3.  $n = 1$ . — On a

$$r + pr' = h,$$

ovales de Descartes.

Il vient

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \operatorname{tang}^p \frac{\theta'}{2} = K.$$

4.  $n = 2$ . — On a

$$r^2 \pm r'^2 = h,$$

cercles concentriques et droites perpendiculaires à  $FF'$ .

On trouve

$$\cot \theta \pm \cot \theta' = K,$$

droites issues de l'origine et droites parallèles à  $FF'$ .

Soit encore

$$f(r, r') = r^n r'^p = h.$$

On a successivement

$$nr^{n-1} r'^p dr + pr^n r'^{p-1} dr' = 0$$

et

$$nr^n r'^p d\theta - pr^n r'^p d\theta' = 0,$$

ou

$$n d\theta - p d\theta' = 0,$$

enfin

$$n\theta + p\theta' = K.$$

Ce résultat est connu.

5.  $n = p = 1$ . — On a

$$rr' = h,$$

ovales de Cassini.

On obtient

$$\theta + \theta' = K,$$

hyperboles équilatères passant par F et F'.

6.  $n = 1, p = 1$ . (Licence. Bordeaux, 1880). — On a

$$\frac{r'}{r} = k,$$

cercles.

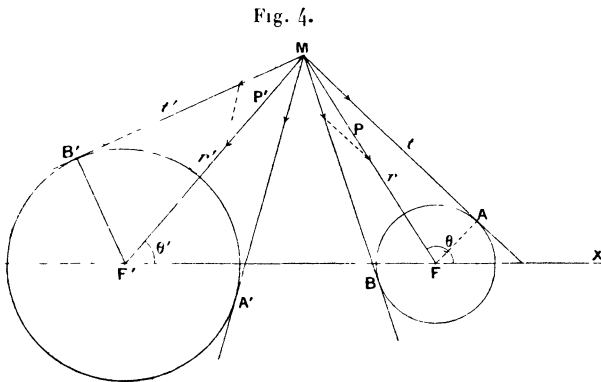
Il vient

$$\theta - \theta' = k,$$

cercles passant par F et F'.

PROBLÈME. — *Un point matériel est attiré suivant les tangentes menées de ce point à deux cercles fixes en raison inverse de la longueur de ces tangentes. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

Les forces égales dirigées suivant les tangentes au cercle AB (fig. 4) ont une résultante P passant par



son centre F; pareillement les forces dirigées suivant les tangentes au cercle A'B' ont une résultante P' passant par F'.

Or

$$P = \frac{2\mu m}{t} \frac{t}{r} = \frac{2m\mu}{r};$$

$$P' = \frac{2m\mu'}{r'},$$

l'équation différentielle des courbes de niveau est

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\mu}{r} \cos \alpha + \frac{2\mu'}{r'} \cos \beta,$$

ou

$$\frac{2\mu}{r} dr + \frac{2\mu'}{r'} dr' = 0.$$

On a donc pour les trajectoires orthogonales

$$\mu d\theta + \mu' d\theta' = 0,$$

et, par suite,

$$\mu\theta + \mu'\theta' = K.$$

Si  $\mu = \mu'$ , les courbes de niveau sont les cassinoïdes

$$rr' = h,$$

et les trajectoires orthogonales les hyperboles équilatères

$$\theta + \theta' = K.$$

**PROBLÈME.** — *Un point matériel est attiré par deux pôles fixes; l'attraction de chacun d'eux est proportionnelle à une fonction donnée de l'angle polaire correspondant. Trajectoires orthogonales des courbes de niveau.*

On a pour les courbes de niveau

$$\frac{dV}{dt} = \mu\varphi(\theta) \cos \alpha + \mu'\varphi'(\theta') \cos \beta = 0,$$

ou bien

$$\mu\varphi(\theta) dr + \mu'\varphi'(\theta') dr' = 0,$$



et pour les trajectoires orthogonales

$$\mu \int \frac{\varphi(\theta) d\theta}{\sin \theta} + \mu' \int \frac{\varphi'(\theta') d\theta'}{\sin \theta'} = k.$$

Si

$$\varphi(\theta) = \sin^2 \theta, \quad \varphi'(\theta') = \sin^2 \theta', \quad \mu = \mu',$$

on obtient

$$\cos \theta + \cos \theta' = k :$$

les courbes de niveau sont donc (*Exemple 1*)

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = h.$$

**PROBLÈME.** — *On considère la famille de courbes telle que pour chacune d'elles un arc élémentaire quelconque PN = ds soit assimilable à une aiguille aimantée en équilibre sous l'action d'un aimant de pôles F et F'. P est le pôle positif de l'aiguille et F celui de l'aimant; N est le pôle négatif de l'aiguille et F' celui de l'aimant. Trajectoires orthogonales des courbes ainsi définies en supposant les attractions et répulsions proportionnelles aux puissances n<sup>èmes</sup> de la distance.*

L'équation d'équilibre s'obtient en projetant les forces sur les normales PR et NS (*fig. 5*) à l'élément d'arc; on trouve sans difficulté

$$m \mu r'^n \sin \beta - m \lambda r^n \sin \alpha = m' \mu' r'^n \sin \alpha - m' \lambda' r'^n \sin \beta,$$

Si l'on suppose

$$m \mu = m \lambda = m' \mu' = m' \lambda',$$

elle devient

$$r^n \sin \alpha - r'^n \sin \beta,$$

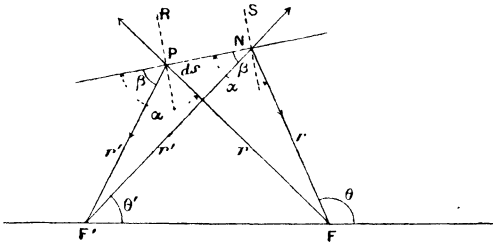
ou encore

$$\frac{d\theta}{\sin^{n+1} \theta} - \frac{d\theta'}{\sin^{n+1} \theta'} = 0$$

et enfin

$$\int \frac{d\theta}{\sin^{n+1}\theta} - \int \frac{d\theta'}{\sin^{n+1}\theta'} = k;$$

Fig. 5.



telle est l'équation générale des courbes d'équilibre; celle des trajectoires orthogonales est, par suite (*voir plus haut*),

$$r^{n+1} - r'^{n+1} = h.$$

*Cas particuliers.* — Dans le cas de la nature  $n = -2$ , l'équation des courbes d'équilibre est donc

$$\cos\theta - \cos\theta' = K,$$

et celle des trajectoires orthogonales

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = h.$$

Pour  $n = -1$ , on a (*Exemple 6*)

$$\theta - \theta' = K,$$

$$\frac{r}{r'} = h.$$

Pour  $n = 0$ , on a (*Exemple 2*)

$$\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta'}{2}} = k,$$

$$r - r' = h.$$

Enfin, pour  $n = 1$ , on a (*Exemple 4*)

$$\begin{aligned}\cot \theta - \cot \theta' &= K, \\ r^2 - r'^2 &= h.\end{aligned}$$

*Remarque.* — Quand on a obtenu les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes donnée, il est quelquefois facile de les rapporter toutes deux au même système de coordonnées bi-polaires.

*Exemple.* — Soient les deux familles orthogonales

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} &= h, \\ \cos \theta + \cos \theta' &= K,\end{aligned}$$

on a les relations

$$\begin{aligned}r^2 &= 4c^2 + r'^2 - 4cr' \cos \theta', \\ r'^2 &= 4c^2 + r^2 - 4cr \cos \theta.\end{aligned}$$

d'où, pour la seconde équation,

$$\frac{4c^2 + r'^2 - r^2}{4cr'} + \frac{r'^2 - r^2 - 4c^2}{4cr} = K.$$

Soient encore les familles orthogonales

$$\begin{aligned}r + r' &= h, \\ \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta'}{2} &= K,\end{aligned}$$

il est facile d'écrire la première équation sous la forme

$$\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta'}{2}} = h',$$

$h'$  désignant une constante arbitraire.