

GEORGES CAFFIN

**Solution géométrique de la question  
proposée pour l'admission à l'École  
normale supérieure en 1894**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 498-501

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_498\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__498_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE (1)  
POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1894;**

PAR M. GEORGES CAFFIN,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

- - - -

On sait que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un cercle égal au cercle des neuf points du triangle, roulant dans un cercle concentrique à ce dernier, et de rayon triple. Il est facile de ramener à cette question celle qui était proposée aux candidats à l'École Normale.

Le problème reposait sur la transformation de Steiner. Si l'on considère un faisceau ponctuel de coniques, on sait que les polaires d'un point fixe A passent par un autre point fixe B, les points A, B étant ainsi conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau. Le point A étant donné, le point B est bien déterminé, sauf si l'on se donne pour A un des sommets du triangle conjugué commun à toutes les coniques, auquel cas le point B est indéterminé sur le côté opposé du triangle.

Cela étant, et le point A décrivant une droite D, trouver le lieu décrit par le point B. Ce lieu est une conique qui est aussi le lieu des pôles de la droite fixe D par rapport à toutes les coniques du faisceau.

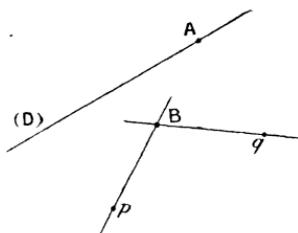
---

(1) Voir même Tome, p. 299

Soient, en effet,  $p, q$  les pôles de  $(D)$  par rapport à deux coniques fixes. Le conjugué d'un point  $A$  s'obtiendra en prenant l'intersection des polaires de  $A$  par rapport aux deux coniques fixes. Les faisceaux  $pB, qB$  sont homographiques, et la conique, lieu de  $B$ , passe en  $p, q$ , ce qui démontre la propriété annoncée.

Comme  $(D)$  coupe les trois côtés du triangle conjugué, la conique  $(C)$ , lieu de  $B$ , est circonscrite à ce triangle.

Fig. 1.



Réciproquement, toute conique circonscrite au triangle est la transformée d'une droite  $D$ . En effet, soient deux points  $p, q$  de cette conique,  $p', q'$  leurs conjugués; la droite  $p'q'$  est la droite cherchée.

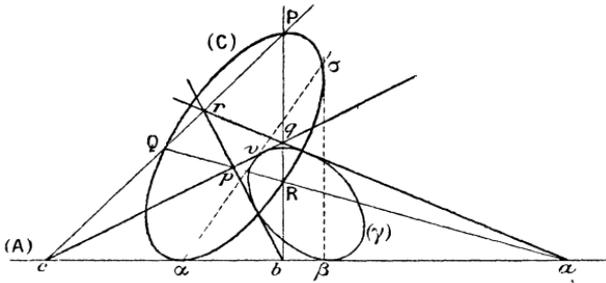
Les points à l'infini de la conique  $(C)$  s'obtiendront en prenant les points d'intersection de  $(D)$  avec la conique  $(\Gamma)$  transformée de la droite de l'infini. Donc, pour que  $(C)$  soit une parabole, il faut et il suffit que  $(D)$  enveloppe la conique  $(\Gamma)$ .

On propose alors de chercher combien il passe d'axes de paraboles  $(C)$  par un point  $P$  donné et la nature de ces axes, en un mot l'enveloppe de ces axes. La question peut être transformée avantagement.

Considérons deux triangles homologues  $PQR, pqr$  dont les côtés se coupent en  $abc$  sur l'axe d'homologie  $(A)$  et tels que les points  $p, q, r$  appartiennent aux côtés du triangle  $P, Q, R$ . Soient  $\alpha, \beta$  deux points de

l'axe. Il existe une conique (C) passant en P, Q, R et tangente en  $\alpha$  à (A). Soit  $\alpha\sigma$  la polaire de  $\beta$  dans la conique (C). Il existe une conique ( $\gamma$ ) tangente à  $\alpha\sigma$ ,  $pr$ ,

Fig. 2.



$qr$  et tangente en  $\beta$  à (A) ou encore à deux droites infiniment voisines (A), (A)' se coupant en  $\beta$ ; (A)' détermine sur les quatre tangentes A,  $\alpha\sigma$ ,  $pr$ ,  $qr$  un rapport anharmonique

$$\rho = (\beta\alpha ba).$$

De même  $pq$  détermine le rapport

$$\rho' = (cv pq).$$

Mais, dans la conique (C), les polaires des points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$  passent respectivement par les points  $c$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $q$ , ce qui entraîne  $\rho = \rho'$ . La conique ( $\gamma$ ) est donc tangente à  $pq$ .

Si maintenant A est la droite de l'infini et si  $\alpha$ ,  $\beta$  sont conjugués par rapport aux points circulaires, on obtient ce théorème :

*Les axes des paraboles circonscrites à un triangle sont les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du premier.*

Or les tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans un triangle sont les droites de Simson du triangle,

( 501 )

et la question se trouve ainsi ramenée à la question bien connue que nous avons rappelée en commençant.