NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. FARJON

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 101-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__101_1>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

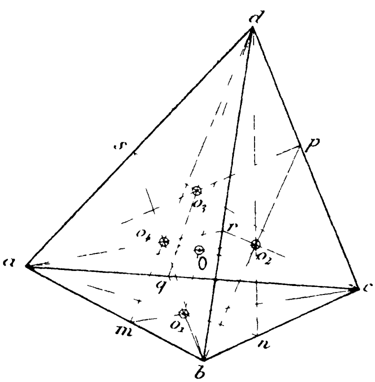
PAR M. F. FARJON.

1. Soient deux points a et b distincts l'un de l'autre, ils déterminent une droite. Nous dirons que tout point de cette droite est un *centre concourant* du réseau (ab). Chacun de ces centres concourants forme sur la droite deux segments dont la différence est égale à la longueur ab.

2. Soient trois points a, b, c, non situés en ligne droite, ils déterminent un plan. Marquons un centre concourant m du réseau (ab) et un centre concourant n du réseau (bc), les deux droites cm et an se coupent en un point o_1, et la droite bo_1 détermine sur ca un centre concourant q du réseau (ca) que nous nommerons *correspondant* des deux centres arbitrairement choisis m

et n. Nous dirons que le point o_1 est un centre concourant du réseau (abc). Inversement tout point o_1 du plan peut être pris pour centre concourant du réseau (abc) et détermine trois centres correspondants des réseaux dérivés (ab), (bc) et (ca). Ces trois centres forment sur les côtés du triangle (abc) six segments qui ont entre eux une relation connue.

3. Soient quatre points a, b, c, d non situés sur un même plan. Ils forment, pris trois à trois, quatre réseaux, et, pris deux à deux, six réseaux dérivés. Prenons trois de ces derniers tels que (ab), (bc), (cd) ne formant pas un même réseau de trois, et marquons arbitrairement sur chacun d'eux un centre concourant m, n, p. Les droites cm et an déterminent un centre concourant o_1 de (abc) et bo_1 un centre concourant q de (ca). Les droites



bp et dn déterminent un centre concourant o_2 de (bcd) et ap et dq, un centre concourant o_3 de (acd) ; nous dirons que o_2 et o_3 sont correspondants de o_1 dans le réseau $(abcd)$.

La droite co_2 détermine un centre r de (bd), et la droite co_3 un centre s de (da). Les deux droites do_1 et

ao_2, situées dans le plan *adn* se coupent en un point O, par lequel passe également bo_3. Tirons cO, cette droite perce le plan *abd* en un point o_4, et l'on reconnaît sans peine que les droites *dm*, *ar* et *bs* passent par ce point qui est donc aussi correspondant de o_1, o_2, o_3, dans le réseau (*abcd*).

Nous dirons que le point O est centre concourant du réseau (*abcd*).

Inversement, un point quelconque O de l'espace peut être pris pour centre concourant du réseau (*abcd*). En effet, en joignant ce point à chacun des points *a*, *b*, *c*, *d*, on détermine sur les plans *bcd*, *cda*, *abd*, *cab* des centres concourants o_1, o_2, o_3, o_4, et l'on vérifie sans difficulté que ces centres sont correspondants.

Si les quatre points donnés sont dans un même plan, la construction du centre concourant se fera exactement de même; il suffit, pour le démontrer, de considérer la figure plane comme la perspective d'une figure de l'espace; mais la construction inverse est indéterminée : en joignant, par exemple, le centre concourant O au point *d*, on peut prendre pour centre o_1 du réseau (*abc*), un point quelconque de cette droite, car on peut toujours supposer que ce point est la perspective d'un point situé dans le plan du triangle dont *abc* est la perspective.

On sait qu'il existe une relation analytique entre les positions de quatre points donnés. Notre construction en donne une interprétation géométrique des plus simples. De plus, on peut l'étendre à des réseaux d'un nombre quelconque de points.

4. Considérons, en effet, cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ils forment cinq réseaux dérivés de quatre points, dix de trois et dix de deux. Prenons quatre de ces derniers ne faisant point partie d'un même réseau de quatre, par

exemple (ab), (bc), (cd) et (ac) et marquons arbitrairement sur chacun d'eux un centre concourant m, n, p, q. La construction qui précède donnera un centre concourant O_1 du réseau $(abcd)$; joignons eO_1. On obtiendra ensuite un centre concourant correspondant O_2 du réseau $(deab)$, et si l'on tire cO_2, on reconnaîtra que cette droite coupe eO_1 en un point Ω, puisque cO_2 et eO_1 sont dans le même plan co_1e [o_1 étant le centre concourant du réseau commum (abd)]. On verra de même que les centres correspondants O_3 de $(bcde)$ et O_4 de $(cdea)$ sont respectivement en ligne droite avec le point Ω et les points a et b, et, finalement, que si l'on joint $d\Omega$, cette droite rencontrera en un même point O_5 les droites qui, dans le réseau $(abce)$ joignent chaque point au centre concourant déterminé des trois autres, que ce point O_5 est donc un dernier correspondant de O_1, O_2, O_3, O_4.

Et nous dirons que Ω est un centre concourant du réseau $(abcde)$.

On peut continuer ainsi de proche en proche, et, généralement, on conclura de la construction du centre concourant du réseau de N points à celle du centre d'un réseau de $N+1$.

5. Revenons au réseau de cinq points. Si, comme dans les cas précédents, on veut suivre une marche inverse, c'est-à-dire prendre comme point de départ un point quelconque de l'espace pris pour centre concourant du réseau et en déduire les centres concourants correspondants des réseaux dérivés de quatre, de trois et de deux points, le problème est indéterminé, et l'on peut prendre pour centre concourant du réseau $(abcd)$, par exemple, un point quelconque de la droite $e\Omega$.

Le cas est entièrement analogue à celui de quatre points pris dans un même plan. Quatre points suffisent en effet, pour déterminer un espace à trois dimensions, et le problème ne sera déterminé que si les cinq points sont pris dans l'hyperespace à quatre dimensions, car il est évident que, daus l'hyperespace, une droite ne peut rencontrer un espace à trois dimensions qu'en un seul point, sans quoi elle serait tout entière dans celui-ci. Donc, dans ce cas, la droite $e\Omega$ rencontrera l'espace déterminé par les points a, b, c, d en un point qui sera le centre concourant de leur réseau, et le reste de la construction s'ensuivra.

On raisonnera de même pour un nombre quelconque de points, et, d'une manière générale, la construction inverse, permettant de remonter du centre concourant d'un réseau de N points aux correspondants dérivés de $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2$ points, ne sera déterminée que si les N points donnés sont pris dans un espace à $N-1$ dimensions.

6. Ces considérations, d'une simplicité tout élémentaire, nous paraissent donner une notion assez nette des hyperespaces. Notre esprit éprouve tout d'abord quelque difficulté à concevoir ces espaces, par la raison bien simple que nous sommes nous-mêmes des êtres à trois dimensions et que, par hérédité comme par éducation, nos sens et notre cerveau ne se représentent *a priori* l'espace autrement qu'à trois dimensions. L'espace à deux dimensions est déjà une conception tout idéale, qui exige un effort de notre part, mais lorsqu'il s'agit d'aller au delà de trois dimensions, la difficulté est bien plus grande encore, d'autant plus que les moyens de représenter graphiquement les figures nous font défaut. Il faudrait, pour les figures à quatre dimensions, qu'un nouveau Monge imaginât une géométrie descriptive où

les plans de projection fussent remplacés par des espaces à trois dimensions. Remarquons, en passant, que ceux-ci doivent se couper suivant des plans, sans quoi ils coïncideraient.

Il arrive parfois que les propriétés d'une figure à N dimensions ne peuvent s'établir avec toute leur clarté géométrique que par la considération de figures à plus de N dimensions. Habituellement, on esquive la difficulté par l'emploi des imaginaires, mais c'est là un procédé qui garde quelque chose d'artificiel et ne nous semble pas satisfaire entièrement l'esprit. On sait de quelle façon, à la fois simple et ingénieuse, Chasles a interprété par une figure à trois dimensions les propriétés du cercle imaginaire : nous-même avons indiqué l'application de cette théorie à l'extension de quelques propositions de Géométrie plane ([1]). Nous en citerons ici un autre exemple qui nous semble plus concluant encore.

7. Les imaginaires s'introduisent en Géométrie plane par la recherche de l'intersection d'une droite et d'un cercle, ou plus généralement de deux cercles et l'on donne le nom d'*axe radical* à la droite, toujours réelle, qui joint les deux points d'intersection, réels ou imaginaires conjugués, des deux cercles.

Or, si l'on considère les deux cercles résultant de la section d'une même sphère par deux plans, l'intersection de ces plans jouit, par rapport aux deux cercles, des propriétés de l'axe radical, et inversement, si l'on considère deux cercles situés dans un même plan comme situés dans des plans distincts, momentanément confondus, l'axe radical est la charnière autour de laquelle

---

([1]) *Nouvelles Annales*, année 1888; p. 288.

on peut faire tourner l'un de ces plans d'un angle quelconque, sans que les deux cercles cessent d'être situés sur une même sphère.

Il en est de même de deux coniques dont les plans coïncident; leurs cordes communes sont les droites autour desquelles on peut faire tourner le plan de l'une d'elles sans qu'elles cessent d'être situées toutes deux sur un cône du second degré.

Cette façon de raisonner dispense de recourir aux soi-disant points d'intersection imaginaires.

Élevons maintenant les dimensions de nos figures d'un degré. On définit le plan radical de deux sphères le plan de l'intersection réelle ou imaginaire de ces sphères. Rien n'empêche de concevoir l'existence dans l'hyperespace d'une sphère à quatre dimensions que l'on définira une figure dont tous les points sont à égale distance d'un point nommé *centre*. L'intersection de cette *hypersphère* par un espace à trois dimensions donne nécessairement une sphère ordinaire. Un second espace à trois dimensions donnera une seconde sphère, et le plan d'intersection de ces deux espaces jouira des propriétés du plan radical des deux sphères. Inversement, si l'on considère deux sphères situées dans le même espace, comme situées dans deux espaces distincts momentanément confondus, le plan radical est, nous ne dirons plus la charnière, mais l'*appui* autour duquel on peut faire tourner l'un des espaces d'un angle quelconque, sans que les deux sphères cessent d'être situées sur une même hypersphère.

On peut continuer à raisonner de la sorte et arriver à la notion d'un espace à N dimensions, radical de deux sphères à $N + 1$ dimensions.

8. Il nous paraît donc acquis que le domaine de la

Géométrie pure s'étend bien au delà des limites que notre imperfection physique lui fait assigner au premier abord. Et cela admis, l'esprit se rend compte de l'existence possible de mondes et de vies infiniment supérieurs aux nôtres. Quel champ ouvert à l'esthétique, par exemple, et imagine-t-on ce que serait une *hyperstatuaire* à quatre dimensions, ou plus encore !

On est aussi conduit dans cette voie à une notion nouvelle de l'infini ; nous ne connaissons effectivement que l'infini de la droite, du plan, ou de l'espace à trois dimensions. Mais envisageons l'espace à un nombre de dimensions de plus en plus grand, et nous nous élèverons à l'infini de l'espace à un nombre infini de dimensions. Nous bornerons là ces réflexions qui s'écartent du modeste sujet que nous avons voulu aborder.