Nouvelles annales de mathématiques

André Cazamian

Sur quelques propriétés des cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 108-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__108_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Un certain nombre de théorèmes relatifs aux cubiques unicursales conduisent très facilement à des propositions correspondantes concernant les cubiques gauches, si l'on fait usage de cette remarque que la projection conique d'une cubique gauche sur un plan est une cubique unicursale. Par exemple, M désignant le point de vue, aux trois tangentes inflexionnelles de la cubique plane correspondent les trois plans osculateurs menés par M à la cubique gauche, et de ce que les trois points d'inflexion sont en ligne droite, on déduit que les trois points de contact des plans osculateurs sont dans un même plan avec le point M. Cette propriété, due à

Chasles, est très connue. La suivante l'est peut-être moins. De ce que le pôle de la droite des inflexions d'une cubique unicursale par rapport au triangle formé par les trois tangentes inflexionnelles est le point double de la cubique, on déduit ce théorème :

La sécante double issue d'un point M *de l'espace à une cubique gauche est la polaire du plan défini par les trois points de contact des plans osculateurs menés par* M *à la cubique, relativement au trièdre formé par ces trois plans osculateurs* ([1]).

Mais nous nous proposons surtout de transformer des propositions relatives aux points conjugués sur les cubiques unicursales, propositions établies par M. Astor (*Nouvelles Annales*, juillet 1892) et par nous-même (résultats démontrés d'abord pour la strophoïde et étendus à toutes les cubiques unicursales dans notre Note : *Sur les cubiques unicursales*).

Considérons une cubique gauche et un point M de l'espace. La perspective de la cubique sur un plan P en prenant le point M pour point de vue est une cubique unicursale. A deux points conjugués de la cubique plane, c'est-à-dire à deux points tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point, correspondent deux points de la cubique gauche tels que les plans passant par la sécante double issue de M et chacun d'eux forment un faisceau harmonique avec les plans définis par la sécante double et les tangentes à la cubique gauche aux points où elle est rencontrée par cette sé-

([1]) La définition de la polaire d'un plan passant par le sommet d'un trièdre, relativement à ce trièdre, étant la même que celle de la polaire d'un plan passant par le sommet d'un cône, relativement à ce cône cante double. Nous appellerons ces points : *points conjugués relativement au point de l'espace* M. Cela posé, on a les propositions suivantes :

L'enveloppe des droites joignant deux points conjugués d'une cubique unicursale est une conique touchant les tangentes au point double.

Étant donnés une cubique gauche et un point M de l'espace, A et B désignant deux points conjugués quelconques de la cubique (relativement au point M), l'enveloppe des plans MAB est un cône du second ordre touchant les plans définis par la sécante double issue de M et les tangentes à la cubique aux points où elle rencontre cette sécante.

Deux points conjugués d'une cubique unicursale ont le même tangentiel.

Les plans passant par un point M de l'espace, et touchant une cubique gauche en deux points conjugués relativement à M, ont le même tangentiel (¹).

Réciproquement, si par un point d'une cubique unicursale on lui mène les deux tangentes, les points de contact sont conjugués.

Réciproquement, si par un point d'une cubique gauche et le point M on mène à la cubique les deux plans tangents, les points de contact sont conjugués relativement à M.

Le collinéaire de deux points conjugués d'une cubique unicursale est conjugué de leur tangentiel.

Le plan défini par un point M de l'espace et deux points d'une cubique gauche conjugués relativement à M rencontre la cubique en un troisième point qui est le con-

(¹) Une cubique gauche et un point M de l'espace étant donnés, on peut appeler *tangentiel* d'un point A de la cubique le point où le plan défini par M et la tangente à la cubique au point A rencontre cette dernière.

jugué du tangentiel commun des deux premiers.

Si l'on joint un point fixe d'une cubique unicursale à tous les couples de points conjugués, on forme un faisceau involutif dont un des rayons doubles est la droite joignant le point M au point double.

M étant un point de l'espace, A un point fixe d'une cubique gauche, les plans passant par la droite MA et par tous les couples de points conjugués forment un faisceau involutif dont l'un des plans doubles est le plan défini par MA et la sécante double issue de M.

Étant donnés sur une cubique unicursale deux couples quelconques de points conjugués (AB), (A′B′), les droites AA′, BB′ se coupent en I sur la cubique, les droites AB′, BA′ se coupent en I′ sur la cubique, et les points I et I′ sont conjugués.

Étant donnés sur une cubique gauche deux couples (AB), (A′B′) de points conjugués relativement à un point M de l'espace, les plans MAA′, MBB′ se coupent en I sur la cubique, les plans MAB′, MBA′ se coupent également en I′ sur la cubique, et les points I et I′ sont conjugués relativement à M.