L. BOSSUT

Note relative à la théorie mathématique de l'élasticité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 141-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__141_1>

NOTE RELATIVE A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ;

Par M. L. BOSSUT,
Capitaine du Génie.

1. Un ellipsoïde rapporté à ses axes ayant pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on sait que les coordonnées d'un point M de sa surface peuvent être représentées par les expressions

$$(2) \qquad x = a\cos\lambda, \qquad y = b\cos\mu, \qquad z = c\cos\nu,$$

les angles λ, μ, ν étant ceux qu'une droite convenablement choisie fait avec les axes de coordonnées, ce qui entraîne la relation connue

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1. \tag{3}$$

Les quantités λ, μ, ν sont appelées ordinairement *coordonnées angulaires* ou *paramètres circulaires* du point M; elles ont, comme on va le voir, une interprétation mécanique remarquable.

2. On sait, d'autre part, que, si à partir d'un point d'un solide et sur les différentes directions qui en émanent on porte des longueurs proportionnelles aux valeurs de la force élastique suivant chacune de ces directions, le lieu des extrémités des droites ainsi obtenues est un ellipsoïde connu sous le nom d'*ellipsoïde d'élasticité,* et qui a pour équation

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1,$$

ses axes étant les axes de coordonnées et les quantités N_1, N_2, N_3 étant les valeurs des tensions principales; ces tensions sont les seules forces élastiques qui soient normales aux éléments-plans sur lesquels elles agissent et qui produisent des déplacements suivant leur propre direction.

Or on sait que les équations qui donnent les valeurs des composantes de la force élastique qui s'exerce sur un plan dont l'axe fait avec trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques des angles λ, μ, ν sont

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= N'_1\cos\lambda + T'_3\cos\mu + T'_2\cos\nu,\\ Y &= T'_3\cos\lambda + N'_2\cos\mu + T'_1\cos\nu,\\ Z &= T'_2\cos\lambda + T'_1\cos\mu + N'_3\cos\nu,\end{aligned}\right.$$

T'_1, T'_2, T'_3 étant les composantes tangentielles des forces élastiques qui s'exercent sur les trois plans coordonnés et N'_1, N'_2, N'_3 les composantes normales des mêmes forces.

Si les axes de coordonnées se confondent avec les directions des tensions principales, T'_1, T'_2, T'_3 s'annulent et les équations précédentes deviennent

$$(6) \qquad X = N_1 \cos\lambda, \qquad Y = N_2 \cos\mu, \qquad Z = N_3 \cos\nu.$$

Si l'on compare ces relations aux relations (2), on voit qu'elles deviennent identiques en posant

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} X = x, & Y = y, & Z = z, \\ N_1 = a, & N_2 = b, & N_3 = c. \end{array} \right.$$

Donc :

Les paramètres circulaires d'un point M *d'un ellipsoïde peuvent être regardés comme étant les angles que fait avec les directions des tensions principales l'axe d'un élément-plan sur lequel agit une force élastique dont les composantes suivant les mêmes directions sont précisément les coordonnées cartésiennes du même point.*

De ce rapprochement résulte une série de démonstrations très simples des propriétés connues des forces élastiques autour d'un point; nous en ferons connaître seulement quelques-unes.

3. Au plan

$$(8) \qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0$$

correspond une force élastique dont l'intensité est

$$(9) \qquad T = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu};$$

mais on sait que l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde parallèle au plan (8) est

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu \\ \quad = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu}; \end{array} \right.$$

donc :

La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde d'élasticité sur un plan tangent parallèle à un élément-plan passant par son centre est, en valeur absolue, égale à l'intensité de la force élastique qui s'exerce sur cet élément.

4. Imaginons par le centre de l'ellipsoïde trois éléments-plans rectangulaires ; les angles que font leurs axes avec les directions des tensions principales sont donnés par le Tableau suivant :

	Ox.	Oy.	Oz.
OM................	λ	μ	ν
OM'...............	λ'	μ'	ν'
OM''...............	λ''	μ''	ν''

Cela posé, faisons la somme des carrés des tensions sur ces trois éléments-plans ; il vient

$$\begin{aligned} T^2+T'_2+T''_2 = \; & a^2(\cos^2\lambda + \cos^2\lambda' + \cos^2\lambda'') \\ & + b^2(\cos^2\mu + \cos^2\mu' + \cos^2\mu'') \\ & + c^2(\cos^2\nu + \cos^2\nu' + \cos^2\nu'') = a^2+b^2+c^2, \end{aligned}$$

la réduction s'opérant parce que les axes ox, oy, oz sont rectangulaires deux à deux ; donc :

La somme des carrés des tensions qui s'exercent sur trois éléments-plans quelconques formant un trièdre trirectangle est constante et égale à la somme des carrés des tensions principales.

5. Si λ, μ, ν ; λ', μ', ν' ; λ'', μ'', ν'' sont les paramètres circulaires de trois points d'un ellipsoïde, les diamètres qui passent par ces points forment un système de diamètres conjugués si les paramètres satisfont à la condition connue de perpendicularité de deux droites. Mais

cette condition,

$$\cos\lambda \cos\lambda' + \cos\mu \cos\mu' + \cos\nu \cos\nu' = 0,$$

exprime que les axes des plans et, par suite, ces plans sont perpendiculaires deux à deux; donc :

Les directions des forces élastiques qui s'exercent sur trois éléments-plans formant un trièdre trirectangle forment un système de trois diamètres conjugués dans l'ellipsoïde d'élasticité.

6. Appelons p l'intensité de la force élastique qui agit sur un élément-plan dont l'axe fait avec les axes de coordonnées des angles λ, μ, ν et α, β, γ les angles que sa direction fait avec les mêmes axes ; on aura

$$\cos\alpha = \frac{a\cos\lambda}{p}, \qquad \cos\beta = \frac{b\cos\mu}{p}, \qquad \cos\gamma = \frac{c\cos\nu}{p}.$$

Cela posé, exprimons que sa direction est parallèle à celle d'un plan dont l'axe fait avec les axes de coordonnées des angles λ', μ', ν', ce qui revient à écrire qu'elle est normale à l'axe du plan ; on aura

$$a\cos\lambda \cos\lambda' + b\cos\mu \cos\mu' + c\cos\nu \cos\nu' = 0;$$

mais cette relation est symétrique en λ, μ, ν et λ', μ', ν'; donc :

Si la force qui s'exerce sur un élément-plan P *est parallèle à un autre élément* P', *réciproquement, la force élastique qui s'exerce sur l'élément* P' *est parallèle à* P.

Les forces élastiques qui satisfont à cette condition sont dites *conjuguées*.