Nouvelles annales de mathématiques

Vladimir Varicak

Note éclaircissant la définition des fonctions elliptiques d'après G.-H. Halphen

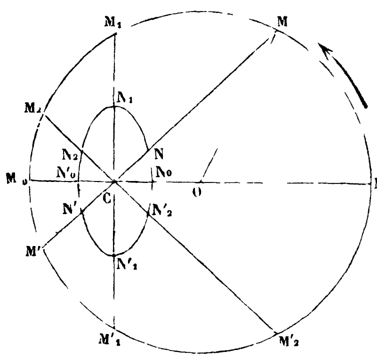
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 14-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__14_0>

NOTE ECLAIRCISSANT LA DÉFINITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES D'APRÈS G.-H. HALPHEN [1];

PAR M. VLADIMIR VARIČAK,
Professeur à l'École réale, à Osijek (Esseg), en Croatie.

1. La représentation des arguments des fonctions elliptiques par les arcs de l'ellipse, de l'hyperbole ou de certaines autres courbes est bien connue, mais on peut les représenter aussi par les secteurs d'une courbe dont la génération est, d'après Halphen, la suivante : soient un cercle et un point C intérieur à ce cercle. Par le



point C, on mène la corde MM′ du cercle et l'on porte sur elle à partir du point C, de part et d'autre, une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée de la corde, c'est-à-dire on fait

$$CN = l\sqrt{\frac{2(R+\delta)}{MM'}}.$$

[1] *Traité des fonctions elliptiques,* Paris, 1886, t. I, p. 1.

Quand on effectue cela sur chaque corde qu'on peut faire passer par le point C, on obtient la courbe en question, comme le lieu des extrémités des rayons vecteurs ainsi obtenus. Dans l'expression précédente, R est le rayon du cercle, δ la distance du point C au centre de ce cercle et l une longueur arbitraire qui n'affecte pas la nature de la courbe. Pour fixer les idées, on peut prendre le rayon du cercle pour unité linéaire et l'on a alors

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{CN} = \sqrt{\mathrm{R}\,\frac{2\mathrm{R}(\mathrm{R}+\delta)}{\mathrm{MM}'}}.$$

La valeur de la fraction sous le signe du radical peut être construite comme la quatrième proportionnelle à trois droites et l'on obtient enfin CN comme la moyenne géométrique. Par ce procédé, on obtiendrait une courbe convexe, de symétrie bilatérale. C'est une courbe du quatrième degré, dont nous allons trouver l'équation.

2. Soit C l'origine des coordonnées. Les abscisses des points M et M', dans lesquelles la corde $y = ax$ coupe le cercle

$$(x-\delta)^2 + y^2 = \mathrm{R},$$

sont données par l'équation

$$x_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\mathrm{R}^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{1+a^2}.$$

En posant $\alpha = \operatorname{arc\,tang} a$ on a, pour les segments CM et CM' de la corde MM',

$$\mathrm{CM} = x_1 \operatorname{séc} \alpha = x_1\sqrt{1+a^2},$$

$$\mathrm{CM}' = x_2 \operatorname{séc}(\pi + \alpha) = -x_2\sqrt{1+a^2},$$

ou

$$\mathrm{CM} = \frac{\delta + \sqrt{\mathrm{R}^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\mathrm{CM}' = -\frac{\delta - \sqrt{\mathrm{R}^2(1+a^2) - a^2\delta^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Si l'on additionne ces deux expressions, on a

$$MM' = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{1 + a^2}\,\delta^2}$$

ou

$$MM' = 2\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}.$$

Après avoir déterminé la longueur de la corde MM', on a pour le rayon vecteur

$$CN = R\sqrt{\frac{R + \delta}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}}.$$

Posons $CN = \rho$, il s'ensuit l'équation polaire de la courbe (C),

$$(2) \qquad \rho^2 = \frac{R^2(R + \delta)}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}$$

ou, dans le système des coordonnées rectangulaires,

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 - \frac{\delta^2}{R^2}(x^2 + y^2)y^2 = R^4\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2.$$

3. Dans l'Ouvrage déjà cité de Halphen, on désigne par u le rapport de l'aire d'un secteur de la courbe (C) au carré l^2 resp. R^2. Effectuant la quadrature de la courbe dans le système des coordonnées polaires, on a, pour la mesure du double secteur,

$$(4) \qquad u = 2\int_0^\alpha \frac{(R + \delta)\,d\alpha}{\sqrt{R^2 - \delta^2 \sin^2\alpha}}.$$

La valeur de cette intégrale dépend de la limite supérieure; u et α sont fonctions l'un de l'autre : α est l'amplitude de u. Halphen nomme ainsi un autre angle, mais nous croyons que la dépendance de ces deux grandeurs est plus directe. Nous avons pris d'ailleurs pour u

la mesure de l'aire du double secteur, parce que cela répond à la définition de l'argument des fonctions circulaires et hyperboliques, dans le système absolu.

Le sinus et le cosinus de l'angle α, ou de l'amplitude de u sont les fonctions elliptiques principales. Géométriquement on les peut représenter par l'ordonnée et l'abscisse du point N situé sur la courbe (C) et dont le rayon vecteur fait l'angle α avec l'axe des x.

4. Quant au module, Halphen le représente par l'excentricité de la courbe (C), et dit que sa valeur numérique est

$$k = \frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}.$$

Mais on chercherait en vain la déduction de cette formule selon la définition citée. En effet, par l'excentricité de la courbe (C) on ne peut entendre autre chose que le rapport $\delta : R$ et c'est précisément le module qu'on doit supposer renfermé dans les expressions $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u$ quand u est donné par (4). Du reste, il est facile de ramener ces modules l'un à l'autre. Module $\frac{\delta}{R}$ est le premier et $\frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}$ le second terme dans l'échelle des modules, qui sont liés entre eux par la relation connue

$$k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i}.$$

On voit donc que le module cité par Halphen est déduit du module primitif $\frac{\delta}{R}$, qui correspond à l'excentricité de la courbe (C).

Le changement du module entraîne nécessairement le changement de l'amplitude d'une manière bien connue ([1]). L'équation (4) peut être écrite

$$u = \frac{2(R+\delta)}{R} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2} \sin^2 \alpha}}$$

et elle prend, quand on change convenablement ([1]) le module et l'amplitude, la forme nouvelle

$$u = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

où k signifie le module de Halphen $\frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}$. Le résultat obtenu établit l'harmonie parfaite entre le procédé de Halphen et celui des autres géomètres.

5. Pour les arguments purement imaginaires, on peut établir une représentation géométrique analogue.

La conjuguée imaginaire (C′) à abscisses réelles de la courbe (C) est

$$(x^2 - y^2)^2 + \frac{\delta^2}{R^2}(x^2 - y^2)y^2 = R^4\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2.$$

Cette équation se déduit de (3) en y remplacant y par $y\sqrt{-1}$. On peut la réduire, au moyen des fonctions hyperboliques, à la forme

$$\rho^2 = \frac{R^2(R+\delta)}{\sqrt{R^2 + \delta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}}, \tag{5}$$

en posant $x = \rho \operatorname{ch} \alpha$, $y = \rho \operatorname{sh} \alpha$. L'équation (2) se transforme aussi en (5) par la substitution de $\alpha\sqrt{-1}$ à α, et c'est, comme l'on sait, la manière de trouver la conjuguée imaginaire de la courbe réelle, quand son équa-

---

([1]) Voir J.-A. Serret, *Cours de Calcul différentiel*, etc., 1886, t. II, p. 245.

tion est donnée en coordonnées polaires ([1]). Par les secteurs de cette courbe, qui a le type d'une hyperbole, seront représentés les arguments imaginaires des fonctions elliptiques. On a pour la mesure du double secteur, qui est limité par le rayon vecteur tracé sous l'angle α, l'arc de la courbe (C′) et l'axe des x,

$$u' = 2\int_0^\alpha \frac{(\mathrm{R}+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}}.$$

Évidemment il est

$$\int_0^{i\alpha} \frac{(\mathrm{R}+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}} = \int_0^\alpha \frac{(\mathrm{R}+\delta)\,di\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2 i\alpha}},$$

et, comme $\mathrm{sh}\, i\alpha = i\sin\alpha$,

$$\int_0^{i\alpha} \frac{(\mathrm{R}+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha}} = i\int_0^\alpha \frac{(\mathrm{R}+\delta)\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}^2-\delta^2\sin^2\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{am}\, iu' = i\,\mathrm{am}\, u$$

et réciproquement

$$i\,\mathrm{am}\, u' = \mathrm{am}\, iu.$$

Avec l'argument imaginaire, il faut lier le module complémentaire. Pour la troisième fonction elliptique, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}\, iu' &= \sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{sh}^2\alpha} = \sqrt{\mathrm{R}^2+\delta^2\,\mathrm{tang}^2 i\alpha}\\ &= \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2-(\mathrm{R}^2-\delta^2)\sin^2 i\alpha}}{\cos i\alpha},\end{aligned}$$

ou

$$\mathrm{dn}\, iu' = \frac{\mathrm{dn}\, u'}{\mathrm{cn}\, u},$$

$i\alpha$ étant $\mathrm{am}\, u'$.

Il faut se rappeler encore les relations qui existent entre les fonctions hyperboliques et circulaires, et l'on

---

([1]) *Voir* M. Marie, *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, t. I, p. 268, Paris, 1874.

pourra aussitôt écrire les équations suivantes

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(iu, k) &= \sin \operatorname{am}(iu, k) = \sin i \operatorname{am}(u', k') = i \operatorname{sh} \operatorname{am}(u', k')\\ &= i \operatorname{tang} \operatorname{am}(u, k') = i \frac{\sin \operatorname{am}(u, k')}{\cos \operatorname{am}(u, k')},\\ \operatorname{cn}(iu, k) &= \cos \operatorname{am}(iu, k) = \cos i \operatorname{am}(u', k') = \operatorname{ch} \operatorname{am}(u', k')\\ &= \frac{1}{\cos \operatorname{am}(u, k')},\end{aligned}$$

ou enfin

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

Remarque. — L'interprétation de la dégénérescence des fonctions elliptiques est maintenant très facile. Pour $\delta = 0$, la courbe (C) se réduit au cercle et la courbe (C') à une hyperbole équilatère. Alors le module k se réduit à zéro, et le module k' à l'unité.