Ed. Maillet

Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 152-157

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__152_0>

DES CONDITIONS POUR QUE L'ÉCHELLE D'UNE SUITE RÉCURRENTE SOIT IRRÉDUCTIBLE;

PAR M. ED. MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées [1].

I.

Dans son « Mémoire sur les suites récurrentes », M. M. d'Ocagne énonce le résultat suivant [2] :

L'échelle d'une suite récurrente d'ordre p est ou n'est pas réductible, suivant que les équations $\Phi(x) = 0$ *et* $\Psi_{p-1}(x) = 0$ *ont ou n'ont pas de racine commune.*

En reprenant les raisonnements de M. M. d'Ocagne, et les développant un peu, on peut dire aussi :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre* p *soit réductible à une d'ordre* $p-q$ *est que les équations* $\Phi(x) = 0$ *et* $\Psi_{p-1}(x) = 0$ *aient* q *racines communes. Cette condition est suffisante quand les racines de l'équation* $\Phi(x) = 0$ *sont distinctes.*

En effet, soit une suite récurrente satisfaisant à la loi

$$(a) \qquad Y_n + D_1 Y_{n-1} + \ldots + D_m Y_{n-m} = 0$$

(1) Le manuscrit de cet article était déjà déposé à la date du 10 décembre 1894, date à laquelle M. Perrin a fait une Communication à l'Académie des Sciences.

(2) *Journal de l'École Polytechnique;* 1894, p. 151. Pour les définitions des polynomes $\Phi(x)$ et $\Psi_{p-1}(x)$, nous renvoyons à ce Mémoire. $\Phi(x) = 0$ est l'équation génératrice de la suite.

d'équation génératrice

$$(b) \qquad \psi(x) = x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m = 0.$$

On voit facilement que cette suite satisfait à la loi ayant pour équation génératrice

$$(c) \qquad \psi(x)(x+\lambda_1)\ldots(x+\lambda_q) = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont arbitraires.

Une loi d'ordre m est dite irréductible *pour une suite donnée satisfaisant à cette loi quand cette suite ne satisfait pas à une loi d'ordre plus petit.*

Que la loi (a) soit irréductible ou non, la suite satisfait à une infinité de lois d'ordre $m+q (q > 0)$, d'après (c), puisque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont arbitraires.

Inversement, *si une suite satisfait à deux lois de même ordre k*,

$$(d) \qquad Y_n + B_1 Y_{n-1} + \ldots + B_k Y_{n-k} = 0,$$

$$(e) \qquad Y_n + C_1 Y_{n-1} + \ldots + C_k Y_{n-k} = 0,$$

ces lois sont réductibles pour la suite considérée, car cette suite satisfait à la loi d'ordre $\leqq k-1$ obtenue en retranchant, membre à membre, (d) et (e).

Enfin, *toute équation génératrice pour la suite considérée est de la forme* (c), *si la loi* (a) *à laquelle elle satisfait est irréductible pour cette suite.*

En effet, supposons que la suite satisfasse à la loi (d), avec $k \geqq m$, puisque la loi (a) est irréductible pour la suite.

Si $k = m$, (d) et (a) sont identiques, et l'équation génératrice de (d) est $\psi(x) = 0$, c'est-à-dire de la forme (c).

Si $k > m$, prenons $q = k - m$: on peut choisir la loi (e) de façon que la suite y satisfasse, que son équation génératrice soit de la forme (c) et que $B_1 \neq C_1$. En retranchant membre à membre (d) et (e), on voit que la suite satisfait à la loi

$$(f) \qquad (B_1 - C_1) Y_{n-1} + \ldots + (B_k - C_k) Y_{n-k} = 0$$

d'ordre $k - 1$. Si à cette loi correspond une équation génératrice de la forme (c), c'est-à-dire ici

$$\psi(x)(x + \lambda'_1) \ldots (x + \lambda'_{q-1}) = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} x^k &+ B_1 x^{k-1} + \ldots + B_k \\ &= x^k + C_1 x^{k-1} + \ldots + C_k + [(B_1 - C_1) x^{k-1} + \ldots + (B_k - C_k)] \\ &= \psi(x)[(x + \lambda_1) \ldots (x + \lambda_q) + (B_1 - C_1)(x + \lambda'_1) \ldots (x + \lambda'_{q-1})]. \end{aligned}$$

Le dernier membre, étant le produit de $\psi(x)$ par un polynome de degré k où le coefficient de x^k est l'unité, est de la forme (c).

On voit aussi que, si toute loi d'ordre $k - 1$ a son équation génératrice de la forme (c), il en est de même de toute loi d'ordre k. Or toute loi d'ordre m a son équation génératrice de la forme (c), d'après ce qu'on a vu; il en est donc de même de toute loi d'ordre $m + 1$, par suite de toute loi d'ordre $m + 2$, etc.

Ces indications sommaires suffisent pour établir le résultat annoncé : si une suite donnée satisfait à une loi

$$(1) \qquad Y_n + A_1 Y_{n-1} + \ldots + A_p Y_{n-p} = 0$$

réductible, son équation génératrice $\Phi(x) = 0$ est de la forme (c), où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont déterminés, et l'on peut toujours choisir une loi d'ordre $p - 1$

$$(2) \qquad Y_n + a_1 Y_{n-1} + \ldots + a_{p-1} Y_{n-p+1} = 0,$$

de façon que son équation génératrice soit $\dfrac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$, λ_j étant une quelconque des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

On en conclut avec les notations et les calculs de M. M. d'Ocagne ([1]),

$$\Psi_{p-1}(\lambda_j) = Y_{p-1} + Q_1(\lambda_j)Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(\lambda_j)Y_0 = 0$$

avec

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i.$$

On en tire d'abord le criterium de réductibilité d'une loi pour une suite donnée, indiqué par M. M. d'Ocagne. Mais ce n'est pas tout.

On voit que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont des racines communes à $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$, et, par suite, quand $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont distincts, ces deux équations auront q racines communes.

Quand certaines des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ deviennent égales, on pourra choisir une loi analogue à (1), de même ordre, à laquelle satisfait la suite considérée, et pour laquelle les racines $\lambda'_1, \lambda'_2 \ldots, \lambda'_q$ de $\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 0$ sont distinctes, mais diffèrent d'aussi peu que l'on veut de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, respectivement, puisque, dans (c), on peut choisir q quantités λ arbitrairement. Les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ sont alors des racines communes aux équations $\Phi'(x) = 0$ et $\Psi'_{p-1}(x) = 0$ correspondant respectivement ici à $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{q-1}(x) = 0$. Ces équations conserveront toujours ces q racines communes quand $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ varient et tendent respectivement vers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tout en restant distinctes; à la limite, $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ auront q racines communes, et dès lors :

Pour que l'échelle d'une suite récurrente d'ordre p soit réductible à une d'ordre $p - q$ pour cette suite,

---

([1]) λ désignant ici ce que M d'Ocagne appelle μ.

il faut que les équations $\Phi(x) = 0$ *et* $\Psi_{p-1}(x) = 0$ *aient* q *racines communes.*

Quand ces deux équations ont une racine commune λ_j, on voit immédiatement, comme l'a indiqué M. M. d'Ocagne, qu'il existe pour la suite une loi analogue à (2) dont l'équation génératrice est $\frac{\Phi(x)}{x - \lambda_j} = 0$; il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite.

Supposons que les deux équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ aient r racines communes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ et que les p racines de $\Phi(x) = 0$ soient distinctes. La suite satisfaisant à une loi d'équation génératrice

$$\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j} = 0,$$

d'après ce qu'on a vu antérieurement, $\frac{\Phi(x)}{x - \mu_j}$ est divisible par $\psi(x)$. $\Phi(x)$ est alors divisible par $\psi(x)(x - \mu_j)$, quel que soit j, par suite par

$$\psi(x)(x - \mu_1), \quad \psi(x)(x - \mu_2), \quad \ldots, \quad \psi(x)(x - \mu_r),$$

et par le plus petit commun multiple de ces quantités; puisque toutes les racines de $\Phi(x) = 0$ sont distinctes, ce plus petit commun multiple sera

$$\psi(x)(x - \mu_1)(x - \mu_2)\ldots(x - \mu_r);$$

il en résulte que la loi (1) est réductible pour la suite considérée à l'ordre $p - r$.

Elle ne pourrait d'ailleurs être réductible à un ordre moindre que si les deux équations

$$\Phi(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi_{p-1}(x) = 0$$

avaient plus de r racines communes. Donc :

Quand l'équation génératrice d'une suite récurrente d'ordre p, $\Phi(x) = 0$, *n'a que des racines distinctes,* *la condition nécessaire et suffisante pour que la loi correspondante soit réductible à l'ordre* $p - q$ *est que les deux équations* $\Phi(x) = 0$ *et* $\Psi_{p-1}(x) = 0$ *aient exactement* q *racines communes.*

On obtient ainsi le théorème que nous avons annoncé au début.

(*A suivre.*)