Nouvelles annales de mathématiques

G. Leinekugel

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 173-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__173_1>

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

Par M. G. LEINEKUGEL.

Une parabole variable a son foyer au centre d'une conique donnée, deux des tangentes communes à cette conique et à l'une des paraboles se coupent en un point qui décrit une droite fixe; démontrer que les deux autres tangentes communes sont constamment tangentes à un cercle fixe.

Si l'on transforme, en effet, la propriété précédente par polaires réciproques, le centre du cercle par rapport auquel on transforme étant le centre de la conique, on a la propriété suivante :

Un cercle variable passe par le centre d'une conique et l'une de ses sécantes communes avec la conique passe par un point fixe, l'autre sécante commune enveloppe une parabole dont le foyer est à l'origine.

Cette propriété se démontre directement par des considérations simples. Je vais montrer que le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur la seconde sécante commune est une droite. La propriété sera par suite démontrée.

Il suffit de prouver que, sur toute droite passant par l'origine, il n'y a qu'un point du lieu. Nous remarquons de suite que l'origine, c'est-à-dire le centre de la conique, ne peut évidemment pas faire partie du lieu. Cela posé, menons une droite quelconque OA par le centre, la droite OB également inclinée sur les axes et la droite CD passant par le point fixe P et perpendiculaire à OB. Nous considérons alors le cercle circonscrit au triangle OCD, qui coupera la conique en deux points E, F réels ou imaginaires, la corde qui les joindra EF sera toujours réelle, elle est également inclinée sur les axes que CD et par suite sera perpendiculaire à OA. D'après la construction, on voit qu'à une droite OA correspond une et une seule droite EF; le lieu du point d'intersection de ces droites est par suite une droite. On voit évidemment qu'elle sera perpendiculaire à OP′ qui est également inclinée sur les mêmes axes que OP, car dans ce cas les droites (E′F′, OF′) sont parallèles.

La seconde proposition donne lieu à la suivante, qui est plus générale :

Étant données une droite IJ, *son pôle* O *par rapport à une conique* (E), *on considère toutes les coniques circonscrites au triangle* OIJ (I, J *deux points de la droite fixe*) *et coupant la conique* (E) *en des points tels que l'une des sécantes communes d'un système passe par un point fixe : l'autre sécante commune enveloppe une conique tangente à* IJ.

La propriété corrélative est la suivante :

On considère un triangle dont l'un des sommets a pour polaire par rapport à une conique (E) *fixe le* *côté opposé, et les coniques inscrites dans ce triangle assujetties à ce que deux de leurs tangentes communes avec* (E) *se coupent sur une droite fixe : le second ombilic du couple, dont l'un d'eux décrit la droite fixe, décrit une conique.*