NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur le théorème de la conservation des aires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 184-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__184_0>

SUR LE THÉORÈME DE LA CONSERVATION DES AIRES;

Par M. A. de SAINT-GERMAIN.

On sait comment, au mois de novembre 1894, M. Marey appela l'attention de l'Académie des Sciences sur les conséquences du théorème de la conservation des aires : contrairement à une opinion exprimée par Delaunay et tacitement admise par les géomètres, MM. Guyou, Maurice Lévy, Appell, Picard montrèrent que, sans l'intervention de forces extérieures, un être animé, un système déformable peuvent tourner d'un angle fini autour d'un certain axe, grâce à des mouvements intérieurs à la suite desquels leurs diverses parties reprennent leurs positions relatives initiales. Je me propose d'indiquer une disposition qui permet d'établir ce fait d'une manière extrêmement simple, susceptible d'être exposée dans les Cours les plus élémentaires; puis, à l'aide d'un calcul très facile, j'exprimerai la loi analytique du mouvement d'un système auquel le précédent se rattache comme cas particulier et qui est tout à fait analogue à un appareil imaginé par M. Lévy.

Considérons un disque horizontal, très mince, parfaitement mobile dans son plan et présentant un centre de symétrie O : du point O comme centre, décrivons sur le disque une circonférence de rayon r et supposons $2p$ animaux, de même masse m, placés deux à deux en des points diamétralement opposés sur la circonférence. Le système étant d'abord en repos, imaginons que, à un instant donné, les $2p$ animaux se mettent à marcher dans le même sens sur la circonférence, de manière que, au bout du temps t, chacun d'eux ait parcouru un même arc, de longueur αr. Le centre de gravité O restera immobile, mais, par rapport à des axes fixes, le disque tournera dans le sens opposé à celui du mouvement relatif des animaux : soient θ l'angle dont il aura tourné au bout du temps t et $2mk^2$ son moment d'inertie relativement au point O. La somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport au point O devant rester constamment nulle, nous aurons

$$2mk^2\frac{d\theta}{dt} - 2pmr^2\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) = 0;$$

l'intégration donne un résultat presque aussi intuitif que l'équation différentielle, savoir :

$$2mk^2\theta - 2pmr^2(\alpha - \theta) = 0.$$

On voit que θ croît proportionnellement à α : quand α sera devenu égal à 2π, les animaux seront revenus à leurs places initiales sur le disque; mais celui-ci, sans l'intervention de forces extérieures, aura tourné de l'angle $\frac{2pr^2\pi}{k^2+pr^2}$.

Le résultat précédent peut suggérer diverses dispositions au moyen desquelles un homme pourrait se donner un mouvement de rotation sans faire intervenir de force extérieure : en voici une assez simple. Supposons l'homme debout sur un sol excessivement poli ou au fond d'un baquet rond qui flotte sur l'eau; il porte, en guise de ceinture, la moitié inférieure d'un tore coupé suivant le plan de son équateur, supposé horizontal : enfin, dans cette sorte de gouttière, plaçons des boules que l'observateur, à l'aide de ses mains, fera rouler dans le même sens : lui-même tournera en sens contraire et par le seul jeu de ses muscles. Il arriverait à un résultat analogue en faisant, par exemple, tourner ses bras dans le même sens autour de sa tête.

Considérons maintenant le système, analogue à l'appareil de M. Maurice Lévy, dont j'ai parlé et dont le mouvement est moins simple que le précédent. Reprenons notre disque et, à sa surface, traçons deux circonférences de rayon r, dont les centres A, A' sont symétriques par rapport au centre O du disque, OA, OA' étant égaux à a : aux deux points des circonférences qui sont les plus éloignés du point O, plaçons deux animaux M, M' de même masse m. Le système étant d'abord en repos, les deux animaux se mettent à marcher sur leurs circonférences, de manière que, sur le disque, les rayons AM, A'M' tournent avec une vitesse constante ω dans le sens opposé à celui dans lequel on comptera l'angle θ dont le disque tournera lui-même par rapport à des axes fixes OX, OY. Au bout du temps t, les coordonnées du point M, rapporté à ces axes, sont

$$x = a\cos\theta + r\cos(\theta - \omega t), \qquad y = a\sin\theta + r\sin(\theta - \omega t);$$

le moment de sa quantité de mouvement autour du point O sera

$$\begin{aligned} & m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \\ & \quad = m\left[a^2\frac{d\theta}{dt} + \left(2\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)ar\cos\omega t + r^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)\right]; \end{aligned}$$

pour le point M', le moment est le même. La somme des moments des quantités de mouvement du système devant rester nulle, on trouve, après avoir divisé par $2m$,

$$(k^2 + a^2)\frac{d\theta}{dt} + ar\left(2\frac{d\theta}{dt} - \omega\right)\cos\omega t + r^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \omega\right) = 0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(r^2 + ar\cos\omega t)\omega}{k^2 + a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t};$$

θ étant nul pour $t = 0$, l'intégration donne

$$\theta = \frac{1}{2}\omega t + \frac{k^2 + a^2 - r^2}{\sqrt{(k^2 + a^2 - r^2)^2 + 4k^2r^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{k^2 + (a-r)^2}}{\sqrt{k^2 + (a+r)^2}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega t.$$

Soit α le plus petit arc positif dont le cosinus est $-\frac{r}{a}$: quand ωt croît de zéro à α, θ augmente, pour diminuer quand ωt ira de la valeur α à $2\pi - \alpha$, puis augmenter ensuite. Quand ωt est égal à 2π, les mobiles M, M′ ont repris sur le disque leurs positions initiales, mais le disque a tourné de l'angle

$$\left[1 - \frac{k^2 + a^2 - r^2}{\sqrt{(k^2 + a^2 - r^2)^2 + 4k^2r^2}}\right]\pi\,;$$

cet angle serait insensible si k était très grand ou très petit, comme l'a indiqué M. Lévy pour son appareil.