

ED. MAILLET

**Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 14 (1895), p. 197-206

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1895\\_3\\_14\\_\\_197\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__197_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



généralement (1) :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} Y_{n+p-1} & Y_{n+p-2} & \dots & Y_n \\ Y_{n+p} & Y_{n+p-1} & \dots & Y_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n+2p-2} & Y_{n+2p-3} & \dots & Y_{n+p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale  $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$ .

Supposons maintenant que la suite considérée satisfasse à une loi d'ordre  $p - 2$

$$(6) \quad Y_n + b_1 Y_{n-1} + \dots + b_{p-2} Y_{n-p+2} = 0.$$

On aura

$$(7) \quad \begin{vmatrix} Y_{p-2} & Y_{p-3} & \dots & Y_0 \\ Y_{p-1} & Y_{p-2} & \dots & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2p-4} & Y_{2p-5} & \dots & Y_{p-2} \end{vmatrix} = 0,$$

d'après ce qui précède.

Considérons le mineur principal du premier ordre du déterminant (4)

$$(8) \quad \delta_i = \begin{vmatrix} Y_{p-1} & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{p+i-2} & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ Y_{p+i} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2p-2} & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

D'après (6), on aura

$$\delta_i = - \begin{vmatrix} b_1 Y_{p-2} + \dots + b_{p-2} Y_1 & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 Y_{p+i-3} + \dots + b_{p-2} Y_i & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ b_1 Y_{p+i-1} + \dots + b_{p-2} Y_{i+2} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 Y_{2p-3} + \dots + b_{p-2} Y_p & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

(1) Toutes les lois, la loi (1) par exemple, donnent lieu à des relations analogues.

Ce déterminant peut être décomposé en  $p - 2$  autres dont  $p - 3$  sont nuls comme ayant leurs colonnes proportionnelles, en sorte que

$$\delta_i = -b_i \begin{vmatrix} Y_i & Y_{p-2} & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2i-1} & Y_{p+i-3} & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ Y_{2i+1} & Y_{p+i-1} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{p+i-1} & Y_{2p-3} & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui multiplie  $b_i$  dans le deuxième membre est au signe près un mineur du premier ordre du déterminant (4) qui est compris dans les mêmes colonnes de (4) que le mineur (7), et qui, par suite, est nul, d'après un théorème connu, puisque le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale  $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$ .

Il en résulte qu'un mineur quelconque du premier ordre de (4) est nul.

La démonstration aurait pu d'ailleurs s'opérer de même en partant d'un mineur quelconque du premier ordre de (4), directement.

Ainsi, quand pour la suite considérée la loi (1) d'ordre  $p$  est réductible à l'ordre  $p - 2$ , le déterminant (4) et ses mineurs du premier ordre sont nuls.

La propriété est d'ailleurs générale et s'établit par des procédés analogues.

Supposons que la loi soit réductible à l'ordre  $p - q$  pour la suite considérée, laquelle satisfera alors à la loi

$$(9) \quad Y_n + c_1 Y_{n-1} + \dots + c_{p-q} Y_{n-p+q} = 0, \quad q > 1.$$

D'après ce qu'on a vu au début, la suite satisfera à des lois d'ordre  $p - 1, p - 2, \dots, p + q + 1$ ; nous savons que le déterminant (4) et ses mineurs du premier

ordre sont tous nuls; admettons qu'il en soit de même pour tous les mineurs d'ordre  $\leq q - 2$  et montrons qu'il en est de même des mineurs d'ordre  $q - 1$ , en remarquant que le mineur d'ordre  $q - 1$

$$(10) \quad \begin{vmatrix} Y_{p-q} & Y_{p-q-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2(p-q)} & Y_{2(p-q)-1} & \dots & Y_{p-q} \end{vmatrix} = 0$$

à cause <sup>(1)</sup> de l'existence de la loi (9).

Supposons qu'il y ait des mineurs d'ordre  $q - 1$  qui soient différents de zéro; parmi ceux d'entre eux qui sont contenus dans les mêmes  $(p - q + 1)$  lignes arbitrairement choisies de (4), de la forme

$$(11) \quad \delta = \begin{vmatrix} Y_r & \dots & Y_s \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{r_1} & \dots & Y_{s_1} \end{vmatrix}.$$

où l'on suppose que, comme dans (4), les colonnes soient ordonnées de façon que dans chaque ligne les indices aillent en décroissant, et que

$$(12) \quad r > \dots > s, \quad \dots, \quad r_1 > \dots > s_1;$$

choisissons celui  $\delta$  pour lequel les indices de la première colonne sont le plus petit possible : il suffit d'ailleurs que cette condition soit remplie pour une ligne de  $\delta$ , la première par exemple, pour qu'elle ait lieu pour les autres lignes. Par hypothèse  $\delta \neq 0$ ; par suite, on aura  $r - s > p - q$ , sans quoi, à cause des conditions (12),  $\delta$  serait contenu dans les mêmes colonnes que (10), et serait nul, puisque (4) est symétrique par rapport à la diagonale  $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$ .

La relation (9) permettra alors de remplacer chaque

---

(1) Il suffit, pour le voir, d'écrire les équations analogues à (3) résultant de la loi (9).

élément de la première colonne de  $\delta$  en fonction linéaire homogène d'éléments d'indices respectivement plus petits compris dans la même ligne de (4). Le mineur  $\delta$  sera donc égal à une fonction linéaire homogène de déterminants mineurs de (4) d'ordre  $q - 1$ ; si dans chacun de ces déterminants on ordonne les colonnes de la même manière que pour  $\delta$ , les indices de la première colonne seront respectivement plus petits que les indices de la première colonne de  $\delta$  compris dans les mêmes lignes. D'après l'hypothèse que nous avons faite sur  $\delta$ , ces déterminants seront tous nuls, et dès lors il en sera de même de  $\delta$ .

On ne peut donc supposer  $\delta \neq 0$ .

On en conclut pour  $q = 3$  que le déterminant (4) et ses mineurs des deux premiers ordres sont nuls; par suite, pour  $q = 4$ , le déterminant (4) et ses mineurs des trois premiers ordres sont nuls; et ainsi de suite. D'où l'on tire :

*Pour que la loi (1) d'ordre  $p$  soit réductible pour la suite considérée à l'ordre  $p - q$ , il est nécessaire que le déterminant (4) et tous ses mineurs jusqu'à l'ordre  $q - 1$  soient tous nuls.*

Remarquons que l'on aurait pu raisonner identiquement de même sur le déterminant (5) : il aurait suffi d'augmenter partout les indices de la quantité  $n$ .

Remarquons également qu'on pourrait ne pas invoquer les propriétés des déterminants symétriques. Il suffirait pour cela d'opérer à l'aide des lois (6) et (9) sur les éléments de chaque colonne de  $\delta_i$  et  $\delta$  qui ont dans cette colonne les plus forts indices, et qui sont d'ailleurs compris dans une même ligne, comme nous l'avons fait sur les éléments de la première colonne de  $\delta_i$  et  $\delta$ . On supposerait de plus que  $\delta_i$  est un mineur quelconque du



c'est-à-dire que la suite satisfait à la loi (14) où  $r$  des coefficients convenablement placés sont arbitraires.

Dès lors, parmi les rapports des quantités  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  à la première d'entre elles qui ne s'annule pas (et l'on sait qu'il y en a), il y en aura  $r - 1$  arbitraires, et l'équation génératrice de la loi (14) renfermera  $r - 1$  coefficients arbitraires : on pourra donc fixer arbitrairement la valeur de  $r - 1$  racines de cette équation génératrice qui est au plus de degré  $p - 1$ , et, d'après ce que nous avons vu, d'après la relation (c) en particulier, l'équation génératrice de la loi irréductible à laquelle satisfait la suite est de degré  $\leq (p - 1) - (r - 1) = p - r$ , ainsi qu'on le montre facilement. La suite satisfait à une loi d'ordre  $p - r$  : elle ne peut satisfaire à une loi d'ordre moindre, d'après ce qui précède, puisqu'il y a un mineur d'ordre  $r$  différent de zéro. Donc (1) :

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que la loi (1) d'ordre  $p$  soit réductible à l'ordre  $p - q$  pour une suite récurrente*

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots,$$

*satisfaisant à cette loi, est que le déterminant*

$$(4) \quad \begin{vmatrix} Y_{p-1} & Y_{p-2} & \dots & Y_0 \\ Y_p & Y_{p-1} & \dots & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2p-2} & Y_{2p-3} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}$$

*soit nul ainsi que tous ses mineurs d'ordre  $\leq q - 1$ .*

On obtient ainsi sous forme explicite, et sans avoir d'élimination à faire, les conditions nécessaires et suffi-

(1) M. Kronecker est arrivé à ce théorème par une méthode semblable, quoique légèrement différente (*Monatsberichte der Berl. Akad.*, 16 juin 1881.)

santes pour que la loi (1) soit réductible à l'ordre  $p - q$  pour la suite considérée, puisque l'on peut toujours exprimer  $Y_p, \dots, Y_{2p-2}$  à l'aide de  $Y_{p-1}, \dots, Y_0$  qui sont donnés et des coefficients  $A_1, \dots, A_p$ .

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la loi soit réductible pour la suite considérée, ou pour que les équations  $\Phi(x) = 0$  et  $\Psi_{p-1}(x) = 0$  aient une racine commune, est que le déterminant (4) soit égal à zéro.

On déduit de ce théorème et de la Section II du Mémoire de M. M. d'Ocagne le corollaire suivant :

*Corollaire.* — La condition nécessaire et suffisante pour que chaque terme général d'une suite du  $p^{\text{ième}}$  ordre, quelconque, soit une fonction linéaire homogène de  $p$  termes généraux consécutifs d'une suite donnée de même échelle est que l'échelle considérée soit irréductible pour cette dernière suite.

Cette propriété a d'ailleurs été établie et utilisée par M. M. d'Ocagne, quand la suite donnée est ce qu'il a appelé *la suite fondamentale*.

### III.

#### APPLICATIONS.

##### 1<sup>o</sup> L'équation

$$\Psi_{p-1}(x) = Y_{p-1} + Q_1(x)Y_{p-2} + \dots + Q_{p-1}(x)Y_0 = 0$$

est de la forme

$$(15) \quad x^{p-1} + \alpha_1 x^{p-2} + \dots + \alpha_{p-1} = 0.$$

On pourra toujours déterminer  $Y_{p-1}, \dots, Y_0$  de façon que  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  aient des valeurs choisies arbitrairement, ou que (15) soit une équation quelconque de



est que l'équation génératrice

$$\Phi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p = 0$$

n'ait pas de racine double.

2° M. M. d'Ocagne a énoncé<sup>(1)</sup> la propriété suivante :

*Les puissances p<sup>èmes</sup> des nombres entiers*

$$0^\mu, 1^\mu, 2^\mu, \dots, n^\mu, \dots$$

*forment une suite récurrente qui admet pour polynome générateur irréductible  $(x - 1)^{\mu+1}$ .*

En formant pour ces suites le déterminant analogue de (5), on en conclut l'identité

$$\begin{vmatrix} x^\mu & (x+1)^\mu & \dots & (x+\mu+1)^\mu \\ (x+1)^\mu & (x+2)^\mu & \dots & (x+\mu+2)^\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+\mu+1)^\mu & (x+\mu+2)^\mu & \dots & (x+2\mu+2)^\mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui a lieu quel que soit  $(x)$ .

Il nous suffira de signaler, dès lors, que cet autre théorème de M. M. d'Ocagne<sup>(2)</sup>

*Toute fonction algébrique et entière des termes de même rang de plusieurs suites récurrentes engendre elle-même une suite récurrente,*

donnera lieu à une foule d'identités analogues.

Si  $f(x)$  est un polynome entier en  $x$  de degré  $\mu + 1$ , on aura

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & \dots & f(x+\mu+1) \\ f(x+1) & f(x+2) & \dots & f(x+\mu+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+\mu+1) & f(x+\mu+2) & \dots & f(x+2\mu+2) \end{vmatrix} = 0,$$

quel que soit  $x$ .

(<sup>1</sup>) *Loc. cit.*

(<sup>2</sup>) *Loc. cit.*